

DR. SYDNEY ROSS,

*Rensselaer Polytechnic
Institute -
Troy, New York*

LJS BIBLIOTHECA

206

SCHOENBERG DATABASE

SCHOENBERGENSIS

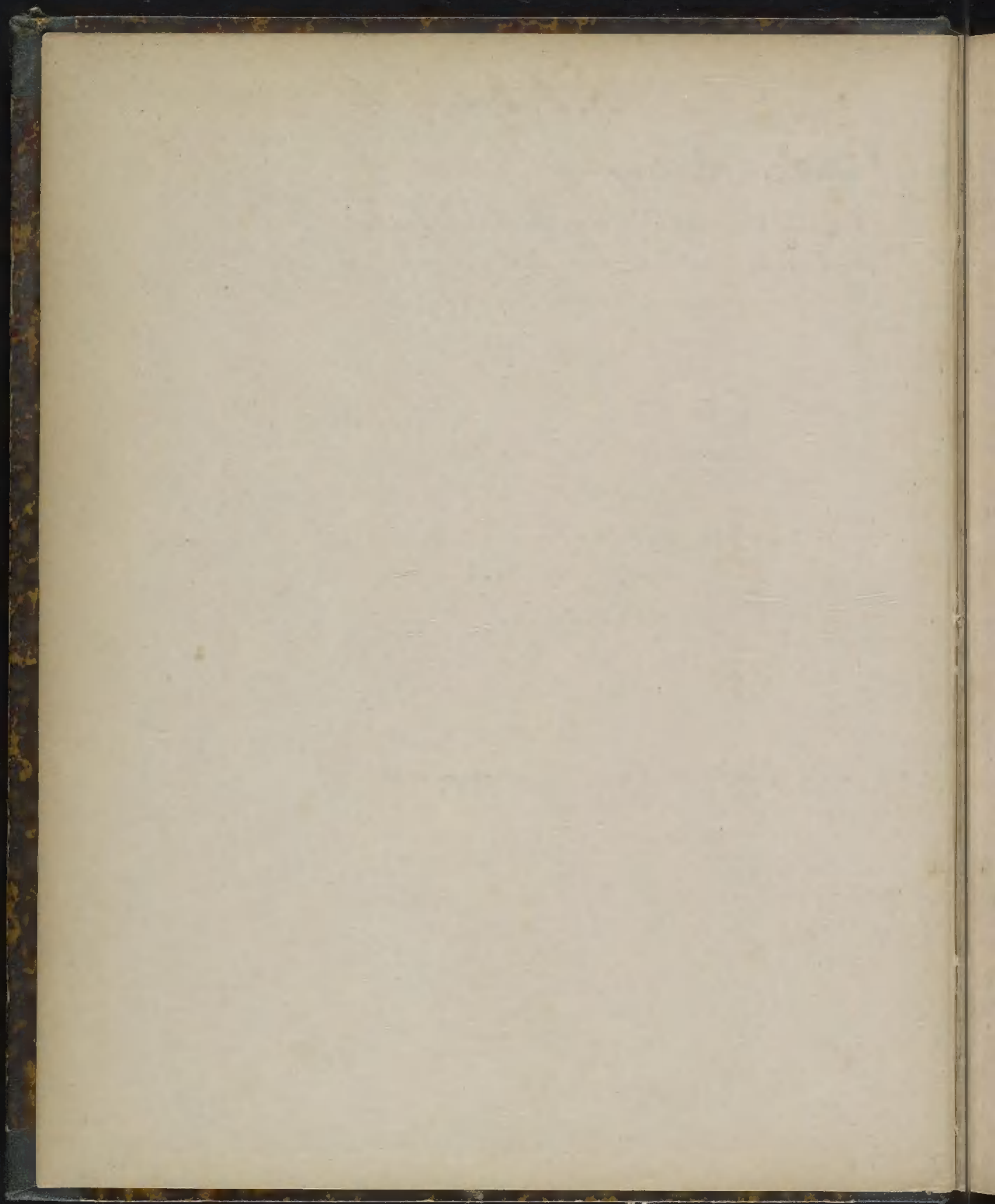
OF MANUSCRIPTS

LJS

A. L. Daniels.

Berlin - Gottengen 1879-1883

49 Mansfield Ave
Burlington Vt
1910.

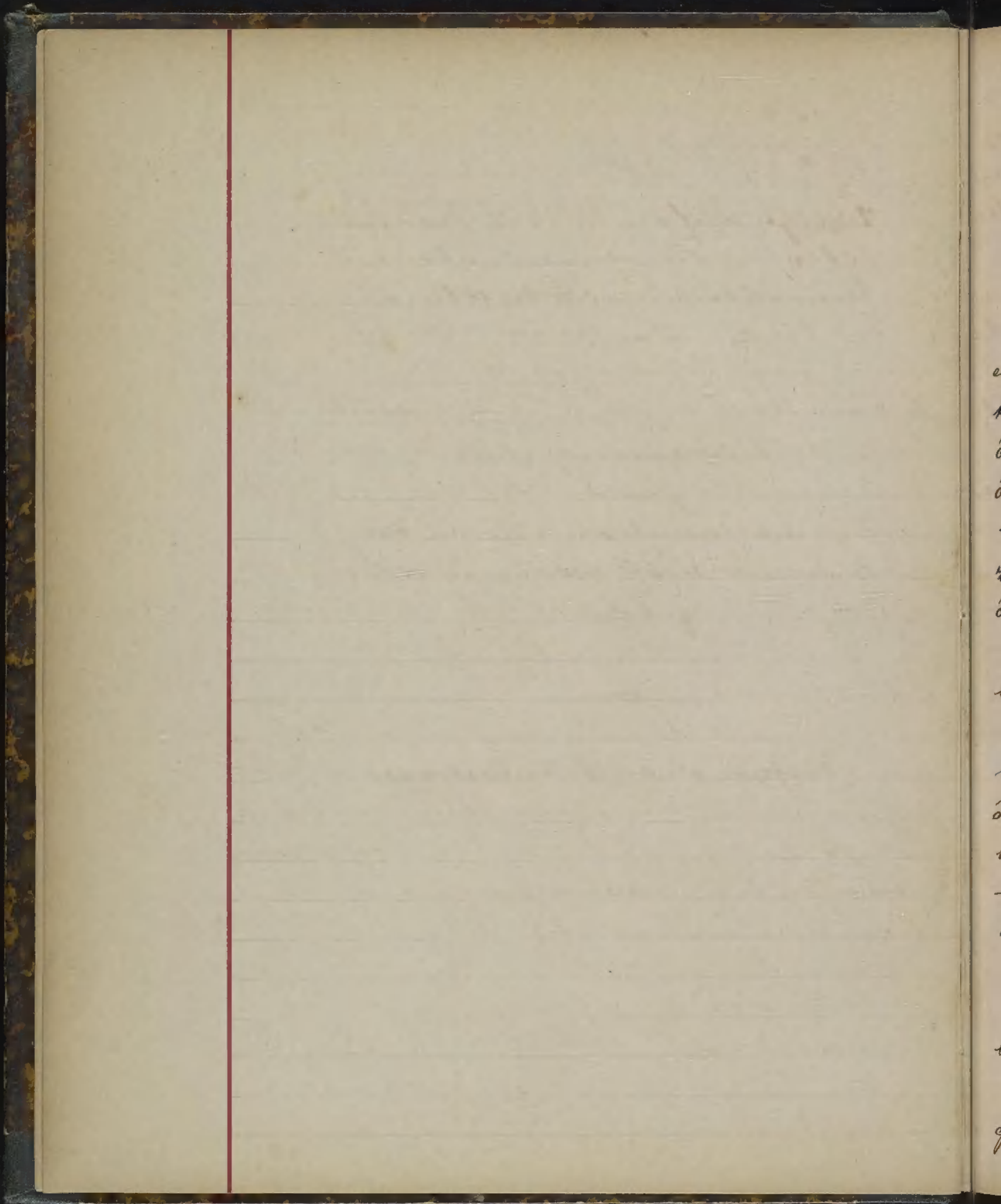


Einige auf die Theorie der ana-
lytischen Functionen mehrerer
Veränderlichen sich beziehende
Sätze.

Zusammengestellt
und
dem mathematischen Verein zu
Berlin zur Veröffentlichung über-
geben

von

Professor Dr. C. Weierstrass.



Zunige auf die Theorie der analytischen Functionen mehrerer Veränderlichen sich beziehenden Sätze.

1. Vorbereitungssatz.

Sei $F(x, x_1, \dots, x_n)$ eine, gegebene, in der Form einer gewöhnlichen Potenzreihe dargestellte Function von x, x_1, \dots, x_n , welche, wenn diese Veränderlichen sämtlich verschwinden, ebenfalls gleich Null wird, so giebt es stets unendlich viele, dem Convergenzbereich der Reihe angehörige Werthsysteme der Größen x, x_1, \dots, x_n , welche die Gleichung

$$F(x, x_1, \dots, x_n) = 0$$

befriedigen.

Bei vielen Untersuchungen handelt es sich nun darum, von diesen Werthsystemen alle diejenigen zu bestimmen, bei denen der absolute Betrag jeder einzelnen GröÙe eine beliebig klein anzunehmende Grenze nicht überschreitet.

Es werde

$$F(x, 0, \dots, 0) \text{ mit } F_0(x)$$

bezeichnet und

$$F(x, x_1, \dots, x_n) = F_0(x) - F_1(x, x_1, \dots, x_n)$$

gesetzt, so dass F_1 für jeden Werth von x gleich

Null wird, wenn x, \dots, x_n sämtlich verschwinden. Ich nehme nun zunächst an, dass $F_0(x)$ nicht für jeden Werth von x verschwinde. Dann kann man eine positive GröÙe ϱ so annehmen, dass $F_0(x)$ für keinen Werth von x , dessen absoluter Betrag ≥ 0 , aber $\leq \varrho$ ist, verschwindet, und dass es ungleich Werthe von x_1, x_2, \dots, x_n , die sämtlich von Null verschieden sind, giebt, für welche die Reihe $F_1(\varrho, x, \dots, x_n)$ convergirt. Wenn dann ferner eine zweite positive GröÙe ϱ_0 , die ebenfalls > 0 aber $< \varrho$ ist, angenommen und festgesetzt wird, dass der absolute Betrag von x zwischen ϱ_0 u. ϱ , die absoluten Beträge von x_1, \dots, x_n aber alle unter einer Gränze ϱ liegen sollen, so kann man ϱ so klein annehmen, dass für alle diesen Bedingungen entsprechenden Werthsysteme von x, x_1, \dots, x_n :

F_0 dem absoluten Betrage nach größer als F_1 ist. Man hat daher:

$$\begin{aligned} \frac{1}{F(x, x_1, \dots, x_n)} &= \frac{1}{F_0} + \frac{F_1}{F_0^2} + \frac{F_1^2}{F_0^3} + \dots = \sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{F_1^\lambda}{F_0^{\lambda+1}} \\ \frac{\partial F}{\partial x} &= \frac{\partial F_0}{\partial x} + \sum_{\lambda=1}^{\infty} \frac{F_1^\lambda \partial F_0}{F_0^{\lambda+1}} - \sum_{\lambda=1}^{\infty} \frac{F_1^{\lambda-1} \partial F_1}{F_0^\lambda} \\ &= \frac{\partial F_0}{\partial x} - \sum_{\lambda=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{F_1^\lambda}{F_0^\lambda} \right) \end{aligned}$$

Es ist aber, da der größte Werth, welchen der absolute Betrag von $\frac{\bar{F}_1}{\bar{F}_0}$ für alle jetzt betrachteten Werthe von x, x_1, \dots, x_n besitzt, kleiner als 1 ist, die Reihe:

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=\infty} \frac{1}{\lambda} \frac{\bar{F}_1^\lambda}{\bar{F}_0^\lambda}$$

gleichmäßig convergent, und daher:

$$\frac{\partial \bar{F}}{\partial x} = \frac{\partial \bar{F}_0}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\infty} \frac{1}{\lambda} \frac{\bar{F}_1^\lambda}{\bar{F}_0^\lambda}$$

Es kann ferner, wenn das Anfangsglied in der Entwicklung von $\bar{F}_0(x)$ den Exponenten m hat, $\frac{\bar{F}_1^\lambda}{\bar{F}_0^\lambda}$ in eine Reihe von der Form:

$$\sum_{\mu=0}^{\mu=\infty} G(x, \dots, x_n)_{\lambda, \mu} x^{-m\lambda + \mu}$$

entwickelt werden, wo $G(x, \dots, x_n)_{\lambda, \mu}$ eine gewöhnliche Potenzreihe von x, \dots, x_n bedeutet, und bei der eben erwähnten Eigenschaft der Reihe $\sum_{\lambda=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda} \frac{\bar{F}_1^\lambda}{\bar{F}_0^\lambda}$ kann man alle Glieder, welche dieselbe Potenz von x enthalten, in eins zusammenfassen und erhält so:

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=\infty} \frac{1}{\lambda} \frac{\bar{F}_1^\lambda}{\bar{F}_0^\lambda} = \sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty} G(x, \dots, x_n)_\nu x^\nu$$

wo auch $G(x, \dots, x_n)$ eine gewöhnliche Potenzreihe bezeichnet. Ferner ist

$$\frac{\partial \bar{F}_0}{\partial x} = m x^{-1} + G(x),$$

wo $G(x)$ eine gewöhnliche Potenzreihe von

x bedeutet. Also:

$$\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{F} = m x^{-1} + f(x) - \frac{\partial}{\partial x} \sum_{v=-\infty}^{+\infty} f(x, \dots, x_n) \cdot x^v$$

Aus dieser Gleichung lässt sich unmittelbar
ersehen, dass, wenn man den Grössen x, x_2, \dots, x_n
bestimmte Werthe, die dem absoluten Betra-
ge nach sämtlich kleiner als ξ , sind, bei-
legt, die Gleichung

$$F(x, x, \dots, x_n) = 0$$

stets durch m Werthe von x , die dem absolu-
ten Betrage nach kleiner als ξ sind, befrie-
digt wird, vorausgesetzt, dass jeder so oft ge-
zählt wird als die zugehörige Ordnungs-
zahl anzeigt.

Dass es überhaupt innerhalb des ange-
gebenen Bereiches Werthe von x giebt, welche
 $F=0$ machen, lässt sich so zeigen: Ange-
nommen, es werde $F(x, x, \dots, x_n)$ bei gegebe-
nen Werthen von x, \dots, x_n für keinen der
in Rede stehenden Werthe von x gleich
Null, es würde sich $\frac{\partial F}{\partial x}$ für alle Werthe
von x , die dem absoluten Betrage nach
kleiner als ξ sind, in eine nur ganze
positive Potenzen von x enthaltende Reihe
entwickeln lassen, und diese müsste für
die ihrem absoluten Betrage nach zwi-
schen ξ_0 u. ξ liegenden mit der vorstehenden

übereinstimmen. Dies ist aber nicht möglich, da in der letzteren das Glied mx^{-1} vorkommt. (Da die erste Ableitung einer Potenzreihe von x niemals ein Glied mit dem Exponenten -1 enthält, so kann sich das angegebene Glied nicht gegen ein anderes heben.) - Angenommen nun, es seien:

$$x', x'', \dots, x^{(r)}$$

die in dem angegebenen Bereiche liegenden Werthe von x , welche die Gleichung $F(x, x', \dots, x^{(r)}) = 0$ befriedigen, wobei ein jeder in diese Reihe so oft aufgenommen ist, als seine Ordnungszahl anzeigt, so wird die Differenz

$$\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{1}{x - x'} - \dots - \frac{1}{x - x^{(r)}}$$

für keinen Werth von x , dessen absoluter Betrag kleiner als ρ ist, unendlich groß, u. kann daher in eine nur ganze positive Potenzen von x enthaltende Reihe $P(x)$ entwickelt werden. Für alle Werthe von x , die dem absoluten Betrage nach kleiner als ρ , aber größer als jede der Größen $x', x'', \dots, x^{(r)}$ und ρ_0 sind, hat man also:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = P(x) + \sum_{v=0}^{\infty} S_v x^{-v-1}$$

wo

$$S_v = (x')^v + \dots + (x^{(v)})^v,$$

und $\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{F} = m x^{-1} + G(x) - \sum_{v=-\infty}^{v=+\infty} G(x, \dots, x_n) \cdot v x^{v-1}$

Die Vergleichung dieser beiden Ausdrücke von $\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{F}$ giebt

$$S_0 = m \text{ oder } r = m$$

d. h. die Anzahl der in Rede stehenden, die Gleichung $F(x, x, \dots, x_n) = 0$ befriedigenden Werthe von x ist gleich dem Grade des Anfangsgliedes von $F(x, 0, \dots, 0)$.

Ferner ergibt sich, wenn man

$$v = -l \text{ und } l > 0 \text{ annimmt}$$

$$S_l = l G(x, \dots, x_n) - l$$

Setzt man daher:

$$f(x, x, \dots, x_n) = (x - x') \dots (x - x^{(m)}) = x^m + f_1 x^{m-1} + \dots + f_m$$

so daß

$$\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{f} = \frac{1}{x - x'} + \dots + \frac{1}{x - x^{(m)}}$$

verhält man für Werthe von x , die dem absoluten Betrage nach größer sind als $x' \dots x^{(m)}$,

$$\frac{m x^{m-1} + (m-1) f_1 x^{m-2} + \dots + f_{m-1}}{x^m + f_1 x^{m-1} + \dots + f_m} = m x^{-1} + S_1 x^{-2} + S_2 x^{-3} + \dots$$

und hieraus:

$$f_1 = -S_1$$

$$2 f_2 = -S_2 - S_1 f_1$$

$$3 f_3 = -S_3 - S_2 f_1 - S_1 f_2$$

$$\dots \dots \dots$$

$$m f_m = -S_m - S_{m-1} f_1 - S_{m-2} f_2 - \dots - S_1 f_{m-1}$$

Hierher sind f_1, \dots, f_m sämtlich Potenzreihen von x, \dots, x_n , welche sicher convergieren, wenn alle diese Größen dem absoluten Betrage nach kleiner als ρ sind. Die gesuchten m Werthe von x werden dann gefunden durch Auflösung der Gleichung

$$x^m + f_1 x^{m-1} + \dots + f_m = 0$$

Man erhält ferner durch Vergleichung der beiden Ausdrücke von $\frac{\partial F}{\partial x}$

$$P(x) = Q(x) - \sum_{v=0}^{\infty} (v+1) G(x, \dots, x_n)_{v+1} x^v$$
 für alle Werthe von x , die dem absoluten Betrage nach kleiner als ρ sind.

Setzt man daher

$$G(x, x, \dots, x_n) = \int_0^x Q(x) dx - \sum_{v=0}^{\infty} G(x, \dots, x_n)_{v+1} x^{v+1}$$

$$F(x, x, \dots, x_n) = e^{G(x, x, \dots, x_n)}$$

so sind G u. F gewöhnliche Potenzreihen von x, x, \dots, x_n , welche sicher convergieren, sobald der absolute Betrag von x kleiner als ρ , der von x, \dots, x_n kleiner als ρ ist. Dabei wird $F = 1$, wenn x, x, \dots, x_n sämtlich verschwinden.

Aus der Gleichung

$$\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{F} = \frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{f} + \frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{F}$$

folgt nun:

$$F(x, x, \dots, x_n) = f(x, x, \dots, x_n) \cdot C f(x, x, \dots, x_n),$$

wo C den Coefficienten von x^m in $F(x, 0, 0, \dots, 0)$ bedeutet.

Die Coefficienten von f, F sind nun unabhängig von den gewählten Größen ξ, ξ_1 ; die vorstehende Gleichung muß also gelten für alle Werthe von x, x_1, \dots, x_n , bei denen die Reihen F alle drei convergiren.

Nehmen wir also eine Größe δ so an, dass erstens alle Werthsysteme von x, x_1, \dots, x_n , in denen jede dieser Größen dem absoluten Betrage nach die Grenze δ nicht überschreitet, dem Convergenzberich der genannten drei Reihen angehören, u. dass zweitens $F(x, x_1, \dots, x_n)$ für keines derselben verschwindet, so werden diejenigen unter diesen Werthsystemen, welche die Gleichung $F(x, x_1, \dots, x_n) = 0$ bestimmt.

Es ist hierbei, wie bemerkt, angenommen worden, dass

$$F(x, 0, \dots, 0)$$

nicht identisch gleich Null ist. Ist dies der Fall, so hat man zur Lösung der gestellten Aufgabe folgendermaßen zu verfahren.

Man bezeichne mit $(x, x_1, \dots, x_n)_\lambda$ die Summe derjenigen Glieder von $F(x, x_1, \dots, x_n)$, welche von der λ -ten Dimension sind, und mit μ den klein-

sten Werth von λ , für welchen die Coefficienten von $(x, x, \dots, x_n)_\lambda$ nicht sämtlich verschwinden, so dass man

$$\bar{F}(x, x, \dots, x_n) = (x, x, \dots, x_n) + (x, x, \dots, x_n)_{\mu+1} + \dots$$

hat. Sodann führe man an Stelle von x, x, \dots, x_n ebenso viele andere Veränderliche y, y, \dots, y_n mittelst der Gleichungen:

$$x = c_{00} y + c_{01} y_1 + \dots + c_{0n} y_n$$

$$x_1 = c_{10} y + c_{11} y_1 + \dots + c_{1n} y_n$$

$$\dots \dots \dots$$

$$x_n = c_{n0} y + c_{n1} y_1 + \dots + c_{nn} y_n,$$

ein, wo die Grössen $c_{00} \dots c_{nn}$ Constanten bezeichnen, die keiner andern Beschränkung unterworfen sind, als dass

$$\begin{vmatrix} c_{00} & \dots & c_{0n} \\ c_{10} & \dots & c_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ c_{n0} & \dots & c_{nn} \end{vmatrix} \text{ und } (c_{00}, c_{10}, \dots, c_{n0})_\mu$$

von Null verschieden sein müssen. Durch diese Substitution verwandelt sich $\bar{F}(x, x, \dots, x_n)$ in eine ähnliche Function von y, y, \dots, y_n , welche mit $\bar{F}(y, y, \dots, y_n)$ bezeichnet werden möge.

Dann hat man:

$$\bar{F}(y, 0 \dots 0) = (c_{00}, c_{10}, \dots, c_{n0})_\mu y^\mu + (c_{00}, c_{10}, \dots, c_{n0})_{\mu+1} y^{\mu+1} + \dots$$

Es ist also die Function $\bar{F}(y, 0 \dots 0)$ nicht identisch gleich Null und ihr Anfangsglied von der μ ten Ordnung.

Man kann daher nach dem Bewiesenen $\bar{F}(y, y_1, \dots, y_n)$ darstellen in der Form

$$\bar{F}(y, y_1, \dots, y_n) = (y^n + y^{n-1} G_1(y_1, \dots, y_n) + \dots + G_n(y_1, \dots, y_n)) \bar{G}(y, y_1, \dots, y_n),$$
 wo G_1, \dots, G_n Potenzreihen von y_1, \dots, y_n bezeichnen, die sämtlich gleich Null werden, wenn diese Variablen sämtlich verschwinden, während $\bar{G}(y, y_1, \dots, y_n)$ eine Potenzreihe von y, y_1, \dots, y_n ist, welche einen von Null verschiedenen Werth erhält, wenn y, y_1, \dots, y_n sämtlich gleich Null gesetzt werden. Die letztere Reihe kann nun in eine ebenso beschaffene Potenzreihe von x, x_1, \dots, x_n verwandelt werden, die mit $G(x, x_1, \dots, x_n)$ bezeichnet werden möge. Dann hat man

$$\bar{F}(x, x_1, \dots, x_n) = (y^n + y^{n-1} G_1(y_1, \dots, y_n) + \dots + G_n(y_1, \dots, y_n)) \bar{G}(x, x_1, \dots, x_n)$$

Nun kann man δ so klein annehmen, dass für jedes Werthsystem der Größen x, x_1, \dots, x_n , in welchem jede einzelne dem absoluten Betrage nach kleiner als δ ist, erstens $G(x, x_1, \dots, x_n)$ einen von Null verschiedenen Werth erhält und zweitens das entsprechende Werthsystem der Größen y, \dots, y_n dem gemeinschaftlichen Convergenzbezirk der Reihen $G_1(y_1, \dots, y_n), \dots, G_n(y_1, \dots, y_n)$ angehört. Hieraus ergibt sich folgendes:

Wenn man zu jedem dem gemeinschaftlichen Convergenzbezirk der Reihen G_1, \dots, G_n angehörigen Werthsysteme y_1, \dots, y_n die μ der Gleichung:

$$y^n + y^{n-1} G_1(y_1, \dots, y_n) + \dots + G_n(y_1, \dots, y_n) = 0$$

genügenden Werthe von y bestimmt, und dann zu jedem der so sich ergebenden Wertsysteme y, y_1, \dots, y_n die entsprechenden x, x_1, \dots, x_n berechnet, so finden sich unter diesen alle der Gleichung $F(x, x_1, \dots, x_n) = 0$ genügenden, welche die Bedingung erfüllen, dass jede einzelne Grösse dem absoluten Betrage nach kleiner als die angegebene Grösse δ ist.

2.

Eine Potenzreihe $\mathcal{P}_1(x_1, \dots, x_n)$ ist durch eine andere $\mathcal{P}_0(x_1, \dots, x_n)$ theilbar, wenn sich eine dritte Reihe $\mathcal{P}_2(x_1, \dots, x_n)$ so bestimmen lässt, dass

$$\mathcal{P}_1(x_1, \dots, x_n) = \mathcal{P}_0(x_1, \dots, x_n) \mathcal{P}_2(x_1, \dots, x_n)$$

ist.

Hat \mathcal{P}_0 an der Stelle $(x_1 = 0, \dots, x_n = 0)$ einen von Null verschiedenen Werth, so existirt stets eine die vorstehende Gleichung befriedigende Reihe \mathcal{P}_2 ; dagegen ist dies nicht der Fall, wenn $\mathcal{P}_0(0, \dots, 0) = 0$ ist, während $\mathcal{P}_1(0, \dots, 0)$ einen von Null verschiedenen Werth hat. Es bleibt daher nur zu untersuchen, unter welchen Bedingungen \mathcal{P}_1 durch \mathcal{P}_0 theilbar ist in dem Falle, wo

$$\mathcal{P}_0(0, \dots, 0) = 0, \quad \mathcal{P}_1(0, \dots, 0) \neq 0$$

beide gleich Null sind.

Man führe (wie in № 1) an Stelle von x, \dots, x_n andere Veränderliche t_1, \dots, t_n ein, indem man

$$x_1 = g_{11} t_1 + \dots + g_{1n} t_n$$

$$\dots \dots \dots$$

$$x_n = g_{n1} t_1 + \dots + g_{nn} t_n$$

setzt und die Constanten $g_{11}, g_{12}, \dots, g_{nn}$ so wählt, dass erstens x_1, \dots, x_n von einander unabhängige Functionen der Größen t_1, \dots, t_n sind, und zweitens weder $\bar{P}_0(g_{11} t_1, \dots, g_{n1} t_1)$ noch $\bar{P}_1(g_{11} t_1, \dots, g_{n1} t_1)$ für jeden Werth von t , verschwindet.

Wenn dann die höchsten Potenzen von t_1 , durch welche diese beiden Functionen von t , theilbar sind, beziehlich die Exponenten μ, ν haben, so kann man, wie in № 1 gezeigt worden

$\bar{P}_0(x_1, \dots, x_n)$ auf die Form $G_0(t_1, t_2, \dots, t_n) \bar{P}_0(t_1, \dots, t_n)$
 $\bar{P}_1(x_1, \dots, x_n) \quad \quad \quad G_1(t_1, t_2, \dots, t_n) \bar{P}_1(t_1, \dots, t_n)$
bringen, wo

$$G_0(t_1, t_2, \dots, t_n) = t_1^\mu + \bar{P}_1(t_2, \dots, t_n) t_1^{\mu-1} + \dots + \bar{P}_\mu(t_2, \dots, t_n)$$

$$G_1(t_1, t_2, \dots, t_n) = t_1^\nu + \bar{P}_1(t_2, \dots, t_n) t_1^{\nu-1} + \dots + \bar{P}_\nu(t_2, \dots, t_n)$$

ist. Dabei verschwinden $\bar{P}_1, \dots, \bar{P}_\mu, \bar{P}_1, \dots, \bar{P}_\nu$ sämmtlich an der Stelle ($t_2 = 0, \dots, t_n = 0$), während sowohl $\bar{P}_0(0, \dots, 0)$ als auch $\bar{P}_1(0, \dots, 0)$ einen von Null verschiedenen Werth hat.

Man nehme nun eine positive GröÙe δ

so an, dass für jedes den Bedingungen

$$|t_1| \leq \delta, \dots, |t_n| \leq \delta$$

genügende Werthsystem (t_1, \dots, t_n) die angege-
benen Umformungen von $\mathcal{P}_0(x_1, \dots, x_n)$,

$\mathcal{P}_1(x_1, \dots, x_n)$ gelten und zugleich $\mathcal{P}_0(t_1, \dots, t_n)$,

$\mathcal{P}_1(t_1, \dots, t_n)$ einen von Null verschiedenen

Werth haben. Dann kann man ferner eine

positive GröÙe δ_1 , die kleiner als δ ist, so an-

nehmen, dass für jedes den Bedingungen

$$|t_2| \leq \delta_1, \dots, |t_n| \leq \delta_1$$

genügende Werthsystem (t_2, \dots, t_n) jede der bei-
den Gleichungen

$$\mathcal{G}_0(t_1, t_2, \dots, t_n) = 0, \quad \mathcal{G}_1(t_1, t_2, \dots, t_n) = 0$$

nur durch solche Werthe von t_1 , die dem ab-

soluten Betrage nach kleiner als δ sind, be-

friedigt wird. Sind für irgend ein System

bestimmter Werthe von t_2, \dots, t_n

$$t_1', t_1'', \dots, t_1^{(m)}$$

die von einander verschiedenen Werthe von t_1 ,

welche der einen oder der andern dieser Gleichun-

gen, oder auch beiden genügen, so hat man

$$\frac{\mathcal{G}_1(t_1, t_2, \dots, t_n)}{\mathcal{G}_0(t_1, t_2, \dots, t_n)} = (t_1 - t_1')^{\lambda_1} \dots (t_1 - t_1^{(m)})^{\lambda_m}$$

wobei $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ ganze Zahlen bezeichnen, deren

Summe gleich $\nu - \mu$ ist. Ist eine dieser Zah-

len einen negativen Werth, so kann man der

GröÙe t_1 einen solchen Werth geben, dass

$$\left| \frac{G_1(t_1, t_2, \dots, t_n)}{G_0(t_1, t_2, \dots, t_n)} \right| > g$$

ist, wo g eine beliebig angenommene positive GröÙe bedeutet, ohne dass $G_0(t_1, t_2, \dots, t_n) = 0$ ist. In Folge der Gleichung

$$\frac{\Psi_1(x_1, \dots, x_n)}{\Psi_0(x_1, \dots, x_n)} = \frac{G_1(t_1, t_2, \dots, t_n)}{G_0(t_1, t_2, \dots, t_n)} - \frac{\bar{\Psi}_1(t_1, \dots, t_n)}{\bar{\Psi}_0(t_1, \dots, t_n)}$$

existiren also in jeder noch so kleinen Umgebung der Stelle $(0, 0, \dots, 0)$ Werthsysteme (x_1, \dots, x_n) für die der Quotient

$$\frac{\Psi_1(x_1, \dots, x_n)}{\Psi_0(x_1, \dots, x_n)}$$

dem absoluten Betrage nach jede beliebig angenommene GröÙe übertrifft.

Daraus folgt sofort, dass, wenn $\Psi_1(x_1, \dots, x_n)$ durch $\Psi_0(x_1, \dots, x_n)$ theilbar sein soll, jede der Zahlen $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ positiv oder gleich Null, und somit — zumeist unter der Voraussetzung, dass t_2, \dots, t_n bestimmte, den Bedingungen

$$|t_2| \leq \delta, \dots, |t_n| \leq \delta,$$

genügende Werthe haben, und der absolute Betrag der Vereinderlichen t_1 nicht größer als δ sei — $G_1(t_1, t_2, \dots, t_n)$ durch $G_0(t_1, t_2, \dots, t_n)$ theilbar sein muss. Darn ist zuerst erforderlich, dass $\nu \geq \mu$ sei.

Nun kann man aber, wenn diese Bedingung erfüllt ist, und

$A_0 t_1^\mu + A_1 t_1^{\mu-1} + \dots + A_\mu$, $B_0 t_1^\nu + B_1 t_1^{\nu-1} + \dots + B_\nu$
 zwei ganze Functionen von t , mit unbe-
 stimmten Coefficienten sind, zwei andere
 Functionen

$$C_0 t_1^{\nu-\mu} + \dots + C_{\nu-\mu}, \quad D_1 t_1^{\mu-1} + \dots + D_\mu$$

dergestalt bestimmen, dass die Gleichung

$$A_0^{\nu-\mu+1} (B_0 t_1^\nu + \dots + B_\nu) = (A_0 t_1^\mu + \dots + A_\mu) (C_0 t_1^{\nu-\mu} + \dots + C_{\nu-\mu}) + D_1 t_1^{\mu-1} + \dots + D_\mu$$

besteht, und es werden dann

$$C_0, \dots, C_{\nu-\mu}, \quad D_1, \dots, D_\mu$$

ganze Functionen von $A_0, \dots, A_\mu, B_0, \dots, B_\nu$. Die
 nothwendigen u. hinreichenden Bedingun-
 gen dafür, dass bei bestimmten Werthen von
 $A_0, \dots, A_\mu, B_0, \dots, B_\nu$ und unter der Voraussetz-
 ung, dass A_0 nicht den Werth Null habe,

$$B_0 t_1^\nu + \dots + B_\nu \text{ durch } A_0 t_1^\mu + \dots + A_\mu$$

theilbar sei, werden dann durch die μ Gleichungen:

$$D_1 = 0, \dots, D_\mu = 0$$

ausgedrückt.

Setzt man nun

$$A_0 = 1, \quad A_1 = \dot{P}_1(t_2, \dots, t_n), \dots, A_\mu = \dot{P}_\mu(t_2, \dots, t_n)$$

$$B_1 = 1, \quad B_2 = \dot{P}_2(t_2, \dots, t_n), \dots, B_\nu = \dot{P}_\nu(t_2, \dots, t_n)$$

so werden $C_0, \dots, C_{\nu-\mu}, D_1, \dots, D_\mu$ Potenzreihen von
 t_2, \dots, t_n , die sämmtlich an der Stelle ($t_2 = 0, \dots, t_n = 0$)
 verschwinden und mit

$$\dot{P}_0^3(t_2, \dots, t_n), \dots, \dot{P}_{\nu-\mu}^3(t_2, \dots, t_n), \quad \dot{P}_1^4(t_2, \dots, t_n), \dots, \dot{P}_\mu^4(t_2, \dots, t_n)$$

bezeichnet werden mögen. Damit $\dot{P}_1(x_1, \dots, x_n)$

durch $\dot{P}_0(x_1, \dots, x_n)$ theilbar sei, müssen nun:

$\overset{*}{P}_1(t_2, \dots, t_n), \dots, \overset{*}{P}_\mu(t_2, \dots, t_n)$
sämtlich verschwinden, wenn

$$|t_2| \leq \delta_1, \dots, |t_n| \leq \delta_1.$$

Dies ist aber nur möglich, wenn in jeder Reihe sämtliche Coefficienten gleich Null sind.

Angenommen nun, diese Bedingung sei erfüllt, so hat man

$$\begin{aligned} G_1(t_1, t_2, \dots, t_n) &= G_0(t_1, t_2, \dots, t_n) \cdot (t_1^{\nu-\mu} + \dots + \overset{*}{P}_{\nu-\mu}(t_2, \dots, t_n)) \\ &= G_0(t_1, t_2, \dots, t_n) \cdot G_2(t_1, t_2, \dots, t_n) \end{aligned}$$

und daher

$$\begin{aligned} \overset{*}{P}_0(x_1, \dots, x_n) &= G_0(t_1, t_2, \dots, t_n) \cdot \bar{\overset{*}{P}}_0(t_1, t_2, \dots, t_n) \\ \overset{*}{P}_1(x_1, \dots, x_n) &= G_0(t_1, t_2, \dots, t_n) \cdot G_2(t_1, t_2, \dots, t_n) \cdot \bar{\overset{*}{P}}_1(t_1, \dots, t_n) \\ &= \overset{*}{P}_0(x_1, \dots, x_n) \cdot G_2(t_1, t_2, \dots, t_n) \cdot \frac{\bar{\overset{*}{P}}_1(t_1, \dots, t_n)}{\bar{\overset{*}{P}}_0(t_1, \dots, t_n)} \\ &= \overset{*}{P}_0(x_1, \dots, x_n) \cdot \bar{\overset{*}{P}}_2(t_1, \dots, t_n) \end{aligned}$$

Verwandelt man nunmehr $\bar{\overset{*}{P}}_2(t_1, \dots, t_n)$ in eine Potenzreihe von x_1, \dots, x_n , so ergibt sich

$$\overset{*}{P}_1(x_1, \dots, x_n) = \overset{*}{P}_0(x_1, \dots, x_n) \bar{\overset{*}{P}}_2(x_1, \dots, x_n)$$

Wir haben also folgenden Satz:

Es seien $\overset{*}{P}_0(x_1, \dots, x_n), \overset{*}{P}_1(x_1, \dots, x_n)$ zwei Potenzreihen von x_1, \dots, x_n , welche beide an der Stelle $(x_1 = 0, \dots, x_n = 0)$ verschwinden. Man bilde auf die angegebene Weise die beiden Ausdrücke

$$t_1^\mu + \overset{*}{P}_1(t_2, \dots, t_n) t_1^{\mu-1} + \dots + \overset{*}{P}_\mu(t_2, \dots, t_n)$$

$$t_1^\nu + \overset{*}{P}_1(t_2, \dots, t_n) t_1^{\nu-1} + \dots + \overset{*}{P}_\nu(t_2, \dots, t_n),$$

und setze aus $\overset{*}{P}_1, \dots, \overset{*}{P}_\mu, \overset{*}{P}_1, \dots, \overset{*}{P}_\nu$ die Potenzreihen

$$\overset{*}{f}_1(t_2, \dots, t_n), \dots, \overset{*}{f}_n(t_2, \dots, t_n)$$

zusammen. Die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass $\overset{*}{f}_1(x_1, \dots, x_n)$ durch $\overset{*}{f}_0(x_1, \dots, x_n)$ theilbar sei, besteht darin, dass in jeder der Reihen $\overset{*}{f}_1, \dots, \overset{*}{f}_n$ sämtliche Coefficienten gleich Null sein müssen. Es geht aber auch aus dem Vorstehenden hervor, dass nur in dem Falle, wo eine der mit $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ bezeichneten Zahlen negativ ist, $\overset{*}{f}_1$ nicht durch $\overset{*}{f}_0$ theilbar ist. Daraus lässt sich schließen:

Kann man zeigen, dass der absolute Betrag des Quotienten

$$\frac{\overset{*}{f}_1(x_1, \dots, x_n)}{\overset{*}{f}_0(x_1, \dots, x_n)},$$

wenn (x_1, \dots, x_n) in einer gewissen Umgebung der Stelle $(0, \dots, 0)$ und so, dass $\overset{*}{f}_0(x_1, \dots, x_n)$ nicht gleich Null ist, angenommen wird, stets kleiner als eine angebbare GröÙe ist, so reicht dies aus, um festzustellen, dass $\overset{*}{f}_1(x_1, \dots, x_n)$ durch $\overset{*}{f}_0(x_1, \dots, x_n)$ theilbar ist.

Denn wäre das Letztere nicht der Fall, so müsste eine der Zahlen $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ negativ sein, und es existierte, wie gezeigt worden, innerhalb jeder Umgebung der Stelle $(0, \dots, 0)$ ein Werthsystem (x_1, \dots, x_n) , für welches der absolute

Betrug des im Rede stehenden Quotienten jede angelohare Größe übertrüge, ohne dass $\mathcal{P}_0(x_1, \dots, x_n)$ gleich Null wäre, was der Voraussetzung widerspricht.

In jedem Falle, wo entschieden werden kann, ob der Quotient $\frac{\mathcal{P}_1}{\mathcal{P}_0}$ die angegebene Beschaffenheit hat oder nicht, ist man demnach der Bildung der Reihen $\mathcal{P}_1^*, \dots, \mathcal{P}_n^*$ überhoben.

Es soll nun ferner untersucht werden, unter welchen Bedingungen zwei Reihen $\mathcal{P}_0(x_1, \dots, x_n)$, $\mathcal{P}_1(x_1, \dots, x_n)$, die beide an der Stelle $(0, \dots, 0)$ verschwinden, einen gemeinschaftlichen Theiler von derselben Form, der ebenfalls an der Stelle $(0, \dots, 0)$ verschwindet, besitzen.

Angenommen, man habe

$$\mathcal{P}_0(x_1, \dots, x_n) = \mathcal{P}_2(x_1, \dots, x_n) \cdot \mathcal{P}_3(x_1, \dots, x_n)$$

$$\mathcal{P}_1(x_1, \dots, x_n) = \mathcal{P}_2(x_1, \dots, x_n) \cdot \mathcal{P}_4(x_1, \dots, x_n),$$

und es sei $\mathcal{P}_2(0, \dots, 0) = 0$. Man verwandle wieder $\mathcal{P}_0, \mathcal{P}_1$ auf die angegebene Weise in Functionen von t_1, \dots, t_n . Infolge der im Betreff der Functionen $\mathcal{P}_0(g_1 t_1, \dots, g_n t_n)$, $\mathcal{P}_1(g_1 t_1, \dots, g_n t_n)$ gemachten Voraussetzung kann auch $\mathcal{P}_2(g_1 t_1, \dots, g_n t_n)$ nicht für jeden Werth von t verschwinden, die höchste Potenz von t , durch welche diese Function theilbar ist, habe den Exponenten λ , so kann man

$\varphi_2(x_1, \dots, x_n)$ auf die Form $I_2(t_1, t_2, \dots, t_n) \bar{P}_2(t_1, \dots, t_n)$ bringen, wo

$$I_2(t_1, t_2, \dots, t_n) = t_1^\lambda + \bar{P}_1(t_2, \dots, t_n) t_1^{\lambda-1} + \dots + \bar{P}_\lambda(t_2, \dots, t_n),$$

und $\bar{P}_2(0, \dots, 0)$ nicht gleich Null ist.

Dann hat man

$$I_0(t_1, t_2, \dots, t_n) = I_2(t_1, t_2, \dots, t_n) \frac{\bar{P}_2(t_1, \dots, t_n)}{\bar{P}_0(t_1, \dots, t_n)} \quad \varphi_3(x_1, \dots, x_n) = I_2(t_1, t_2, \dots, t_n) \bar{P}_3(t_1, \dots, t_n)$$

$$I_1(t_1, t_2, \dots, t_n) = I_2(t_1, t_2, \dots, t_n) \frac{\bar{P}_2(t_1, \dots, t_n)}{\bar{P}_0(t_1, \dots, t_n)} \varphi_4(x_1, \dots, x_n) = I_2(t_1, t_2, \dots, t_n) \bar{P}_6(t_1, \dots, t_n)$$

Es sind also

$$I_0(t_1, t_2, \dots, t_n), \quad I_1(t_1, t_2, \dots, t_n)$$

beide durch $I_2(t_1, t_2, \dots, t_n)$ theilbar.

Man kann man bekanntlich, wenn

$$A_0, A_1, \dots, A_n, \quad B_0, B_1, \dots, B_v$$

unbestimmte Größen bedeuten, aus denselben eine Reihe von ganzen Functionen

$$C, C_1, C_2, \dots$$

zusammensetzen, vermittelt welcher sich die notwendigen u. hinreichenden Bedingungen dafür, dass bei bestimmten Werthen von $A_0, \dots, A_n, B_0, \dots, B_v$ und unter der Voraussetzung, dass weder A_0 noch B_0 gleich Null sei, die Functionen

$$A_0 t_1^\mu + \dots + A_n, \quad B_0 t_1^\nu + \dots + B_v$$

einen größten gemeinschaftlichen Theiler A^{ten} Grades besitzen, sich folgendermaßen ausdrücken lassen: Es muss in der Reihe der Größen

$C, C_1, C_2, \dots, C_\lambda$ die erste sein, welche nicht gleich Null ist.

Diese Bedingung als erfüllt vorausgesetzt, stellt sich dann der größte gemeinschaftliche Theiler der beiden Functionen in der Form

$$t_1^\lambda + \frac{C_1'}{C_\lambda} t_1^{\lambda-1} + \dots + \frac{C_\lambda^{(\lambda)}}{C_\lambda}$$

dar, wo $C_1', \dots, C_\lambda^{(\lambda)}$ ebenfalls ganze Functionen von $A_0, \dots, A_n, B_0, \dots, B_v$ sind.

Nimmt man

$$A_0 = 1, A_1 = \dot{P}_1(t_2, \dots, t_n), \dots, A_n = \dot{P}_n(t_2, \dots, t_n)$$

$$B_0 = 1, B_1 = \dot{P}_1(t_2, \dots, t_n), \dots, B_v = \dot{P}_v(t_2, \dots, t_n),$$

so werden $C, C_1, C_2, \dots; C_1', C_1'', \dots$ Potenzreihen von t_2, \dots, t_n , die mit

$\dot{P}(t_2, \dots, t_n), \dot{P}^{(1)}(t_2, \dots, t_n), \dot{P}^{(2)}(t_2, \dots, t_n), \dots; \dot{P}^{(\lambda, 1)}(t_2, \dots, t_n), \dot{P}^{(\lambda, 2)}(t_2, \dots, t_n), \dots$ bezeichnet werden mögen. Dann muss, da mit für ein bestimmtes Werthsystem (t_2, \dots, t_n)

$$I_0(t_1, t_2, \dots, t_n), I_1(t_1, t_2, \dots, t_n)$$

als Functionen von t_1 betrachtet, einen gemeinsamen Theiler haben,

$$\dot{P}(t_2, \dots, t_n) = 0$$

sein. Diese Gleichung besteht also beider in Betreff der Functionen $\dot{P}_0(x_1, \dots, x_n), \dot{P}_1(x_1, \dots, x_n)$ gemachten Annahme, wenn man den Größen t_2, \dots, t_n solche Werthe gibt, für welche die angegebenen Umformungen von \dot{P}_0, \dot{P}_1 gelten, woraus folgt, dass die Coefficienten der Reihe $\dot{P}(t_2, \dots, t_n)$ sämmtlich gleich Null sein müssen.

Damit ist die nothwendige Bedingung dafür, dass $\mathcal{F}_0(x_1, \dots, x_n), \mathcal{F}_1(x_1, \dots, x_n)$ einen gemeinschaftlichen Theiler besitzen, festgestellt.

Angenommen nun, es seien für zwei gegebene Potenzreihen $\mathcal{F}_0(x_1, \dots, x_n), \mathcal{F}_1(x_1, \dots, x_n)$ die im Vorstehenden definirten Functionen

$$G_0(t_1, t_2, \dots, t_n), G_1(t_1, t_2, \dots, t_n)$$

$$\mathcal{P}(t_2, \dots, t_n), \mathcal{P}^{(1)}(t_2, \dots, t_n), \mathcal{P}^{(2)}(t_2, \dots, t_n), \dots$$

gebildet, und es ergebe sich, dass die Coefficienten der Reihe $\mathcal{P}(t_2, \dots, t_n)$ sämtlich gleich Null sind, sowie ferner, dass in der Reihe der Functionen $\mathcal{P}, \mathcal{P}^{(1)}, \dots, \mathcal{P}^{(\lambda)}$ die erste sei, die nicht identisch gleich Null ist. Nimmt man dann im Innern des gemeinschaftlichen Convergenzgebietes der Reihen

$$\dot{\mathcal{P}}_1(t_2, \dots, t_n), \dots, \dot{\mathcal{P}}_\mu(t_2, \dots, t_n), \dot{\mathcal{P}}_1'(t_2, \dots, t_n), \dots, \dot{\mathcal{P}}_\nu'(t_2, \dots, t_n)$$

irgend ein bestimmtes Werthsystem $(\bar{t}_2, \dots, \bar{t}_n)$ der Größen t_2, \dots, t_n an und unterwirft diese der Bedingung, dass

$$|t_2| \leq |\bar{t}_2|, \dots, |t_n| \leq |\bar{t}_n|$$

und $\mathcal{P}^{(\lambda)}(\bar{t}_2, \dots, \bar{t}_n)$ nicht gleich Null sein soll, so haben

$$G_0(t_1, t_2, \dots, t_n), G_1(t_1, t_2, \dots, t_n),$$

als Functionen von t_1 betrachtet, einen größten gemeinschaftlichen Theiler vom Grade λ , der zuvörderst in der Form

$$t_1^\lambda + \frac{\mathcal{P}^{(\lambda,1)}(t_2, \dots, t_n)}{\mathcal{P}^{(\lambda)}(t_2, \dots, t_n)} t_1^{\lambda-1} + \dots + \frac{\mathcal{P}^{(\lambda,\lambda)}(t_2, \dots, t_n)}{\mathcal{P}^{(\lambda)}(t_2, \dots, t_n)}$$

erhalten wird. Die Werthe von t_1 , für welche diese Funktion verschwindet, sind sämtlich unter denen, für die $G_0(t_1, t_2 \dots t_n) = 0$ wird, enthalten. Jeder der letzteren aber hat, wie man auch $t_2 \dots t_n$ den angegebenen Bedingungen entsprechend annehmen möge, einen endlichen Werth, dessen absoluter Betrag unterhalb einer angebbaren, von $t_2 \dots t_n$ unabhängigen Grenze liegt. Dasselbe gilt also auch von dem Bruch

$$\frac{p^{(\lambda, \lambda')}(t_2 \dots t_n)}{p^{(\lambda)}(t_2 \dots t_n)} \quad (\lambda' = 1 \dots \lambda),$$

woraus sich nach dem Obigen ergibt, daß der Zähler durch den Nenner theilbar ist. Damit ist bewiesen, daß der vorstehende gemeinschaftliche Theiler von $G_0(t_1, t_2 \dots t_n)$ und $G_1(t_1, t_2 \dots t_n)$ in der Form

$$G_2(t_1, t_2 \dots t_n) = t_1^\lambda + p_1^2(t_2 \dots t_n) t_1^{\lambda-1} + \dots + p_\lambda^2(t_2 \dots t_n)$$

dargestellt werden kann.

Betrachtet man nun wieder

$G_0(t_1, t_2 \dots t_n)$, $G_1(t_1, t_2 \dots t_n)$, $G_2(t_1, t_2 \dots t_n)$ als Funktionen von t_1 und dividirt die beiden ersten durch die dritte, so ergibt sich:

$$G_0(t_1, t_2 \dots t_n) = G_2(t_1, t_2 \dots t_n) G_3(t_1, t_2 \dots t_n)$$

$$G_1(t_1, t_2 \dots t_n) = G_2(t_1, t_2 \dots t_n) G_4(t_1, t_2 \dots t_n)$$

wo G_3, G_4 ganze Funktionen von t_1 , deren Coefficienten Potenzreihen von $t_2 \dots t_n$ sind, bezeichnen.

Multipliziert man sodann die erste dieser

Gleichungen mit $\bar{P}_0(t_1, \dots, t_n)$, die zweite mit $\bar{P}_1(t_1, \dots, t_n)$ und drückt darauf t_1, \dots, t_n durch x_1, \dots, x_n aus, so ergibt sich:

$$P_0(x_1, \dots, x_n) = P_2(x_1, \dots, x_n) \cdot \bar{P}_3(x_1, \dots, x_n)$$

$$P_1(x_1, \dots, x_n) = P_4(x_1, \dots, x_n) \bar{P}_1(x_1, \dots, x_n)$$

wo

$$P_2(x_1, \dots, x_n) = G_2(t_1, t_2, \dots, t_n)$$

ist.

Es läßt sich nun ferner beweisen, dass $P_3(x_1, \dots, x_n)$, $P_4(x_1, \dots, x_n)$ nicht beide durch eine an der Stelle $(x_1 = 0, \dots, x_n = 0)$ verschwindende Potenzreihe von x_1, \dots, x_n theilbar sind.

Es ist:

$$P_3(x_1, \dots, x_n) = G_3(t_1, t_2, \dots, t_n) \bar{P}_0(t_1, t_2, \dots, t_n)$$

$$P_4(x_1, \dots, x_n) = G_4(t_1, t_2, \dots, t_n) \bar{P}_1(t_1, \dots, t_n)$$

Wären nun $P_3(x_1, \dots, x_n)$, $P_4(x_1, \dots, x_n)$ beide durch eine an der Stelle $(x_1 = 0, \dots, x_n = 0)$ verschwindende Potenzreihe von x_1, \dots, x_n theilbar, so müßten sich, wie oben gezeigt worden ist, zwei Größen δ, δ' so annehmen lassen, dass für jedes den Bedingungen

$$|t_2| \leq \delta, \dots, |t_n| \leq \delta'$$

genügende Werthsystem (t_2, \dots, t_n) die Gleichungen

$$G_3(t_1, t_2, \dots, t_n) \bar{P}_0(t_1, \dots, t_n) = 0, \quad G_4(t_1, t_2, \dots, t_n) \bar{P}_1(t_1, \dots, t_n) = 0$$

durch einen und denselben Werth von t_1 , dessen absoluter Betrag kleiner als δ wäre, befriedigt würden. Bei hinlänglich kleinen Werthen von

$\mathcal{G}_3, \mathcal{G}_4$ müsste dieser Werth von t , also den Gleichungen

$$\mathcal{G}_3(t_1, t_2 \dots t_n) = 0, \quad \mathcal{G}_4(t_1, t_2 \dots t_n) = 0$$

genügen, und es hätten somit für jedes den angegebenen Bedingungen entsprechende Werthsystem $(t_2, \dots t_n)$

$\mathcal{G}_3(t_1, t_2 \dots t_n)$ und $\mathcal{G}_4(t_1, t_2 \dots t_n)$ als Functionen von t_1 betrachtet einen gemeinschaftlichen Theiler, und daher

$\mathcal{G}_0(t_1, t_2 \dots t_n)$ und $\mathcal{G}_1(t_1, t_2 \dots t_n)$ einen gemeinschaftlichen Theiler, von höherem als dem 1^{ten} Grade. Dies ist aber nicht der Fall, wenn man $t_2, \dots t_n$ so annimmt, dass $\mathcal{P}^{(\lambda)}(t_2, \dots t_n)$ nicht verschwindet, und es ist somit die Annahme, dass $\mathcal{P}_3(x_1, \dots x_n) \sim \mathcal{P}_4(x_1, \dots x_n)$ beide durch eine an der Stelle $(x_1 = 0, \dots x_n = 0)$ verschwindende Potenzreihe von $x_1, \dots x_n$ theilbar seien, unstatthaft.

Wir haben also den Satz:

Die nothwendige u. hinreichende Bedingung dafür, dass zwei gegebene, an der Stelle $(x_1 = 0, \dots x_n = 0)$ verschwindende Potenzreihen $\mathcal{P}_0(x_1, \dots x_n), \mathcal{P}_1(x_1, \dots x_n)$ beide durch eine dritte Reihe von derselben Beschaffenheit theilbar seien, besteht darin, dass die Coefficienten einer bestimmten, nach der gegebenen Vorschrift zu bildenden Potenzreihe

von $n-1$ Veränderlichen t_2, \dots, t_n sämtlich gleich Null sein müssen. Ferner ist es, wenn diese Bedingung erfüllt ist, stets möglich

$\mathcal{P}_0(x_1, \dots, x_n), \mathcal{P}_1(x_1, \dots, x_n)$ in der Form

$$\mathcal{P}_0(x_1, \dots, x_n) = \mathcal{P}_2(x_1, \dots, x_n) \mathcal{P}_4(x_1, \dots, x_n)$$

$$\mathcal{P}_1(x_1, \dots, x_n) = \mathcal{P}_2(x_1, \dots, x_n) \mathcal{P}_5(x_1, \dots, x_n)$$

so ausdrücken, dass $\mathcal{P}_4(x_1, \dots, x_n), \mathcal{P}_5(x_1, \dots, x_n)$ keinen an der Stelle $(x_1 = 0, \dots, x_n = 0)$ verschwindenden gemeinschaftlichen Theiler haben.

Anmerkung.

Es lässt sich aus dem Vorhergehenden leicht ableiten, dass jede Potenzreihe von x_1, \dots, x_n , durch welche die gegebenen Reihen theilbar sind, nothwendig ein Theiler von $\mathcal{P}_2(x_1, \dots, x_n)$ ist.

Hieran knüpfen sich nun noch einige andere Sätze.

Ich nehme jetzt an, es seien $\mathcal{P}_0(x_1, \dots, x_n), \mathcal{P}_1(x_1, \dots, x_n)$ nicht beide durch eine an der Stelle $(0, \dots, 0)$ verschwindende Potenzreihe von x_1, \dots, x_n theilbar, aber $\mathcal{P}_0(0, \dots, 0) = \mathcal{P}_1(0, 0, \dots, 0)$ gleich Null. Dann gibt es in jeder Umgebung der Stelle $(0, \dots, 0)$ unendlich viele Werthsysteme (x_1, \dots, x_n) , für die sowohl $\mathcal{P}_0(x_1, \dots, x_n)$ als $\mathcal{P}_1(x_1, \dots, x_n)$ verschwindet. Denn man drücke wieder $\mathcal{P}_0(x_1, \dots, x_n), \mathcal{P}_1(x_1, \dots, x_n)$ auf die angegebene Weise durch die Veränderlichen t_1, t_2, \dots, t_n aus, bestimme die Function $\mathcal{P}(t_1, \dots, t_n)$

und nehme auch die Größen δ, δ' so an, wie oben festgesetzt worden ist. Dann giebt es unendlich viele, den Bedingungen

$$|t_1| \leq \delta, \dots |t_n| \leq \delta,$$

entsprechende Werthsysteme (t_1, \dots, t_n) , für die

$$P(t_1, \dots, t_n) = 0$$

ist, und zu jedem dieser Werthsysteme giebt es als wenigstens einen Werth t_1 , dessen absoluter Betrag kleiner als δ ist, und der die beiden Gleichungen

$$G_0(t_1, t_2, \dots, t_n) = 0, \quad G_1(t_1, t_2, \dots, t_n) = 0$$

befriedigt, woraus das zu Beweisende unmittelbar folgt.

Man nehme jetzt im Gebiete der Größen x_1, \dots, x_n irgend einen die Stelle $(0, \dots, 0)$ umgebenden Bezirk an, dass für jedes demselben als angehörige Werthsystem (x_1, \dots, x_n) nicht nur die Gleichungen

$$P_0(x_1, \dots, x_n) = G_0(t_1, t_2, \dots, t_n) \bar{P}_0(t_1, \dots, t_n)$$

$$P_1(x_1, \dots, x_n) = G_1(t_1, t_2, \dots, t_n) \bar{P}_1(t_1, \dots, t_n)$$

gelten, sondern auch $\bar{P}_0(t_1, \dots, t_n), \bar{P}_1(t_1, \dots, t_n)$ beide einen von Null verschiedenen Werth haben, und setze, unter (c_1, \dots, c_n) irgend eine bestimmte Stelle dieses Bezirks und unter (b_1, \dots, b_n) die entsprechende Stelle im Gebiete der Größen t_1, \dots, t_n versetzend,

$$x_1 = c_1 + u_1, \dots, x_n = c_n + u_n$$

$$t_1 = b_1 + s_1, \dots, t_n = b_n + s_n,$$

so dass man

$$u_1 = g_1 s_1 + \dots + g_{1n} s_n, \dots, u_n = g_{n1} s_1 + \dots + g_{nn} s_n$$
$$\mathcal{P}_0(c_1 + u_1, \dots, c_n + u_n) = \mathcal{G}_0(b_1 + s_1, b_2 + s_2, \dots, b_n + s_n) \mathcal{P}_0(b_1 + s_1, \dots, b_n + s_n)$$
$$\mathcal{P}_1(c_1 + u_1, \dots, c_n + u_n) = \mathcal{G}_1(b_1 + s_1, b_2 + s_2, \dots, b_n + s_n) \mathcal{P}_1(b_1 + s_1, \dots, b_n + s_n)$$

hat.

Es können nun $\mathcal{P}_0(c_1 + u_1, \dots, c_n + u_n)$, $\mathcal{P}_1(c_1 + u_1, \dots, c_n + u_n)$ als Potenzreihen von u_1, \dots, u_n betrachtet, einen an der Stelle $(u_1 = 0, \dots, u_n = 0)$ verschwindenden gemeinsamen Theiler nur in dem Falle besitzen, wo $\mathcal{P}_0(c_1, \dots, c_n)$, $\mathcal{P}_1(c_1, \dots, c_n)$ beide gleich Null sind.

Dann ist auch

$$\mathcal{G}_0(b_1, b_2, \dots, b_n) = 0, \quad \mathcal{G}_1(b_1, b_2, \dots, b_n) = 0;$$

es geht aber aus den Ausdrücken $\mathcal{G}_0, \mathcal{G}_1$ hervor, dass weder $\mathcal{G}_0(b_1 + s_1, b_2, \dots, b_n)$ noch $\mathcal{G}_1(b_1 + s_1, b_2, \dots, b_n)$ für jeden Werth von s_1 verschwindet, man kann

also $\mathcal{P}_0(b_1 + s_1, b_2 + s_2, \dots, b_n + s_n)$ auf die Form $(s_1 + \mathcal{P}(s_2, \dots, s_n), s_2 + \dots + \mathcal{P}(s_2, \dots, s_n)) \mathcal{P}(s_1, \dots, s_n)_0$
 $(b_1 + s_1, b_2 + s_2, \dots, b_n + s_n) \cdot \cdot \cdot (s_1 + \mathcal{P}(s_2, \dots, s_n), s_2 + \dots + \mathcal{P}(s_2, \dots, s_n)) \mathcal{P}(s_1, \dots, s_n)_1$ bringen, dass $\mathcal{P}(0, \dots, 0)_0, \dots, \mathcal{P}(0, \dots, 0)_n$,
 $\mathcal{P}(0, \dots, 0)_0, \dots, \mathcal{P}(0, \dots, 0)_n$ sämtlich gleich Null sind, während $\mathcal{P}(0, \dots, 0)_0, \mathcal{P}(0, \dots, 0)_1$ beide einen von Null verschiedenen Werth haben.

Angenommen nun, es wären

$\mathcal{P}_0(c_1 + u_1, \dots, c_n + u_n)$, $\mathcal{P}_1(c_1 + u_1, \dots, c_n + u_n)$ beide durch eine dritte an der Stelle $(u_1 = 0, \dots, u_n = 0)$ verschwindende Potenzreihe von u_1, \dots, u_n theilbar, so würde sich nach dem Vorhergehenden zu jedem System

unendlich kleiner Werthe von s_1, \dots, s_n ein eben
falls unendlich kleiner Werth von s finden
lassen, für den

$G_0(b_1 + s_1, b_2 + s_2, \dots, b_n + s_n), G_1(b_1 + s_1, b_2 + s_2, \dots, b_n + s_n)$
beide gleich Null wären. Dann aber müsste

$$\mathcal{P}(b_2 + s_2, \dots, b_n + s_n) = 0$$

sein für jedes System unendlich kleiner Werthe
von s_2, \dots, s_n , was nach einem bekannten Satze
nur der Fall ist, wenn

$$\mathcal{P}(t_2, \dots, t_n)$$

für jedes dem Convergenzberich der Reihe angehö-
rige Werthsystem (t_2, \dots, t_n) verschwindet, oder
die Coefficienten der Reihe sämtlich gleich Null
sind. Bei der in Betreff der Reihen $\mathcal{P}_0(x_1, \dots, x_n),$
 $\mathcal{P}_1(x_1, \dots, x_n)$ gemachten Annahme ist aber
 $\mathcal{P}(t_2, \dots, t_n)$ nicht identisch gleich Null, und es ist
somit erwiesen:

Wenn die Reihen $\mathcal{P}_0(x_1, \dots, x_n), \mathcal{P}_1(x_1, \dots, x_n)$ kei-
nen an der Stelle $(x_1 = 0, \dots, x_n = 0)$ verschwinden-
den gemeinschaftlichen Theiler besitzen, so
haben auch $\mathcal{P}_0(c_1 + u_1, \dots, c_n + u_n), \mathcal{P}_1(c_1 + u_1, \dots, c_n + u_n)$
als Potenzreihen von u_1, \dots, u_n betrachtet,
keinen an der Stelle $(u_1 = 0, \dots, u_n = 0)$ verschwin-
denden gemeinschaftlichen Theiler, voraus-
gesetzt, dass die Stelle $(x_1 = c_1, \dots, x_n = c_n)$ inner-
halb einer gewissen – oben definirten –
Umgebung der Stelle $(x_1 = 0, \dots, x_n = 0)$ ange-

nommen werde.

3.

Zur Theorie der eindeutigen analytischen Functionen beliebig vieler Veränderlichen.

Ich sage von einer eindeutigen analytischen Function $f(x_1, \dots, x_n)$ sie verhalte sich an einer bestimmten Stelle $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ regulär, wenn sie in einer gewissen Umgebung dieser Stelle durch eine Reihe von der Form

$$\sum \{ A_{\nu_1, \dots, \nu_n} (x_1 - \alpha_1)^{\nu_1} \dots (x_n - \alpha_n)^{\nu_n} \} \\ (\nu_1, \dots, \nu_n = 0 \dots \infty)$$

dargestellt werden kann, wo ν_1, \dots, ν_n ganze Zahlen bezeichnen, und unter den Coefficienten A_{ν_1, \dots, ν_n} von x_1, \dots, x_n unabhängige Größen zu verstehen sind. Diese Reihe nenne ich dann ein reguläres Element der Function. Dabei ist zu bemerken, dass die Größen $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ zum Theil oder auch alle den Werth ∞ haben können, wenn festgesetzt wird, dass das Zeichen $x - \infty$ gleichbedeutend mit $\frac{1}{x}$ sein soll.

Aus der vorstehenden Definition ergibt sich nun sofort:

Verhält sich eine eindeutige analytische Function $f(x_1, \dots, x_n)$ regulär an einer bestimmten

Stelle $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ so gilt dasselbe auch von jeder Stelle $(\alpha'_1, \dots, \alpha'_n)$, die in einer gewissen Umgebung der ersteren liegt.

Denn es sei $\mathcal{P}(x_1 - \alpha_1, \dots, x_n - \alpha_n)$ die Reihe, welche die betrachtete Funktion in der Umgebung von $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ darstellt, so läuft sich aus demselben, wenn man im Innern ihres Convergenzgebietes eine Stelle $(\alpha'_1, \dots, \alpha'_n)$ willkürlich annimmt, eine andere Reihe $\mathcal{P}_1(x_1 - \alpha'_1, \dots, x_n - \alpha'_n)$ dergestalt ableiten, dass für alle einer gewissen Umgebung der Stelle $(\alpha'_1, \dots, \alpha'_n)$ angehörigen Werthsysteme (x_1, \dots, x_n) die Gleichung

$$\mathcal{P}_1(x_1 - \alpha'_1, \dots, x_n - \alpha'_n) = \mathcal{P}(x_1 - \alpha_1, \dots, x_n - \alpha_n)$$

besteht. Es ist also $\mathcal{P}_1(x_1 - \alpha'_1, \dots, x_n - \alpha'_n)$ ebenfalls ein Element der Funktion $f(x_1, \dots, x_n)$ und es verhält sich diese demnach auch an der Stelle $(\alpha'_1, \dots, \alpha'_n)$ regulär.

Die Gesamtheit der Stellen, an denen die Funktion $f(x_1, \dots, x_n)$ sich regulär verhält, bildet hiernach ein einfach zusammenhängendes, $2n$ -fach ausgedehntes Continuum im Gebiet der Größen x_1, \dots, x_n .

Dieses Continuum ist nun nothwendig begrenzt.

Angenommen nämlich, es sei $\mathcal{P}(x_1 - \alpha_1, \dots, x_n - \alpha_n)$ irgendein Element der Funktion f , wobei vorausgesetzt werde, dass die Stelle $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ im Gren

Endlichen liege, so können zwei Fälle eintreten:

1) Convergiert die Reihe $\mathcal{P}(x_1 - \alpha_1, \dots, x_n - \alpha_n)$ für jedes System endlicher Werthe der Größen x_1, \dots, x_n , so besteht, wenn $\mathcal{P}_1(x_1 - \alpha'_1, \dots, x_n - \alpha'_n)$ irgend ein reguläres Element der Function f ist, für jedes dem Convergenzberich der Reihe \mathcal{P}_1 angehörige System endlicher Werthe von x_1, \dots, x_n die Gleichung

$$\mathcal{P}_1(x_1 - \alpha'_1, \dots, x_n - \alpha'_n) = \mathcal{P}(x_1 - \alpha_1, \dots, x_n - \alpha_n).$$

Dies ist aber unmöglich, wenn die Größen $\alpha'_1, \dots, \alpha'_n$ nicht sämtlich endliche Werthe haben, woraus folgt, dass in dem angenommenen Falle eine Stelle (x_1, \dots, x_n) im Innern oder an der Grenze des in Rede stehenden Continuum liegt, je nachdem die Größen x_1, \dots, x_n sämtlich endliche Werthe haben oder nicht.

2) Liegen die dem Convergenzberich der Reihe $\mathcal{P}(x_1 - \alpha_1, \dots, x_n - \alpha_n)$ begrenzenden Stellen alle oder zum Theil im Endlichen, so giebt es, wie in der Functionentheorie gezeigt wird, unter ihnen mindestens eine Stelle, an der sich $f(x_1, \dots, x_n)$ nicht regulär verhält, eine solche Stelle liegt dann auch an der Grenze des in Rede stehenden Continuum.

Dies festgestellt, nenne ich jede an der Grenze dieses Continuum liegende Stelle eine

singuläre Stelle für die betrachtete Functi-
on.

Ist $(\alpha'_1, \dots, \alpha'_n)$ eine solche singuläre Stelle,
so kann es möglicherweise eine Potenzreihe

$$\varphi_0(x_1 - \alpha'_1, \dots, x_n - \alpha'_n)$$

geben, die für $x_1 = \alpha'_1, \dots, x_n = \alpha'_n$ verschwindet
u. so beschaffen ist, dass das Produkt

$$\varphi_0(x_1 - \alpha'_1, \dots, x_n - \alpha'_n) f(x_1, \dots, x_n)$$

für alle einer gewissen Umgebung der Stelle
 $(\alpha'_1, \dots, \alpha'_n)$ angehörigen Werthsysteme (x_1, \dots, x_n)
in der Form

$$\varphi_1(x_1 - \alpha'_1, \dots, x_n - \alpha'_n)$$

dargestellt werden kann. In diesem Falle nen-
ne ich $(\alpha'_1, \dots, \alpha'_n)$ eine aufserwesentliche, in
jedem andern Falle eine wesentliche sin-
guläre Stelle.

Es giebt aber, wenn $n > 1$ ist zwei wohl
von einander zu unterscheidende Arten von
aufserwesentlichen singulären Stellen.

Ist $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ irgend eine solche Stelle, so
lässt sich die Function $f(x_1, \dots, x_n)$ für hin-
länglich kleine Werthe der Differenzen
 $x_1 - \alpha_1, \dots, x_n - \alpha_n$ stets dergestalt in der Form

$$\frac{\varphi_1(x_1 - \alpha_1, \dots, x_n - \alpha_n)}{\varphi_0(x_1 - \alpha_1, \dots, x_n - \alpha_n)}$$

darstellen, dass $\varphi_0(x_1 - \alpha_1, \dots, x_n - \alpha_n), \varphi_1(x_1 - \alpha_1, \dots, x_n - \alpha_n)$
nicht beide durch eine dritte, an der Stelle

(a_1, \dots, a_n) verschwindende Reihe $\mathcal{P}(x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n)$ theilbar sind.

Wenn dann $\mathcal{P}_1(x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n)$ an der Stelle (a_1, \dots, a_n) einen von Null verschiedenen Werth hat, so ist für alle einer unendlich kleinen Umgebung der Stelle (a_1, \dots, a_n) angehörigen Werthsysteme (x_1, \dots, x_n) der Werth von $f(x_1, \dots, x_n)$ unendlich groß, und daher

$$f(x_1, \dots, x_n) = \infty \text{ für } x_1 = a_1, \dots, x_n = a_n$$

Verschwenden dagegen $\mathcal{P}_0(x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n)$, $\mathcal{P}_1(x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n)$ beide an der Stelle (a_1, \dots, a_n) so kann man (nach No. 1), indem man homogene lineare Functionen t_1, t_2, \dots, t_n von $x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n$ einführt, in mannigfaltiger Weise

$$\mathcal{P}_0(x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n) \text{ auf die Form } (t_1^{\mu_1} + \mathcal{P}_1(t_2, \dots, t_n)t_1^{\mu_1-1} + \dots + \mathcal{P}_\mu(t_2, \dots, t_n)) \bar{\mathcal{P}}_0(x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n)$$

$$\mathcal{P}_1(x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n) \text{ " " " } (t_1^{\nu_1} + \mathcal{P}_1(t_2, \dots, t_n)t_1^{\nu_1-1} + \dots + \mathcal{P}_\nu(t_2, \dots, t_n)) \bar{\mathcal{P}}_1(x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n)$$

bringen, dergestalt, dass

$$\mathcal{P}_1(t_2, \dots, t_n), \dots, \mathcal{P}_\mu(t_2, \dots, t_n), \mathcal{P}_1'(t_2, \dots, t_n), \dots, \mathcal{P}_\nu'(t_2, \dots, t_n)$$

$$\text{für } t_2 = 0, \dots, t_n = 0 \text{ verschwinden, } \bar{\mathcal{P}}_0(x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n),$$

$$\text{in } \bar{\mathcal{P}}_1(x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n) \text{ aber an der Stelle } (x_1 = a_1, \dots, x_n = a_n)$$

beide einen von Null verschiedenen Werth ha-

ben. Dann muss unter den Größen t_2, \dots, t_n

eine bestimmte Gleichung

$$\mathcal{P}(t_2, \dots, t_n) = 0$$

bestehen, wenn $\mathcal{P}_0(x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n), \mathcal{P}_1(x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n)$

beide an der Stelle (a_1, \dots, a_n) verschwinden sollen.

Daraus folgt, dass es in jeder noch so kleinen Umgebung von (a_1, \dots, a_n) andre Stellen (x_1, \dots, x_n) giebt, an denen $\varphi_0(x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n)$ verschwindet, $\varphi_1(x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n)$ aber nicht, so dass an jeder solchen Stelle $f(x_1, \dots, x_n) = \infty$ ist. Es hat aber, wenn b eine beliebig angenommene endliche GröÙe ist, die Function

$$\frac{1}{f(x_1, \dots, x_n) - b}$$

in der Umgebung von (a_1, \dots, a_n) dieselbe Form wie $f(x_1, \dots, x_n)$; es existiren also in jeder Umgebung von (a_1, \dots, a_n) auch Stellen, an denen

$$\frac{1}{f(x_1, \dots, x_n) - b} = \infty$$

d. h. $f(x_1, \dots, x_n) = b$ ist.

Es kann also $f(x_1, \dots, x_n)$ in dem jetzt betrachteten Falle in einer unendlich kleinen Umgebung der singulären Stelle (a_1, \dots, a_n) jeden beliebigen Werth annehmen und besitzt deshalb an dieser Stelle selbst keinen bestimmten Werth.

Hierzu ist noch folgendes zu bemerken:

Die Gesammtheit der Stellen, an denen sich $f(x_1, \dots, x_n)$ wie eine rationale Function verhält - d. h. die Gesammtheit der nicht singulären u. der außerwesentlichen singulären

ren Stellen -, ist ein $2n$ -fach ausge-
dehntes Continuum, dessen Begrenzung
die wesentlichen singulären Stellen bilden.

Ist $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ irgendeine bestimmte Stelle
im Innern dieses Continuum, und
hat $f(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ einen bestimmten endlichen
Werth, so verhält sich, - wie schon oben
angegeben worden ist - $f(x_1, \dots, x_n)$ in einer
bestimmten Umgebung der Stelle $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$
überall regulär.

Ist $f(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \infty$, so giebt es in jeder
Umgebung der Stelle $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, die keine sin-
guläre Stelle der Function

$$\frac{1}{f(x_1, \dots, x_n)}$$

enthält, unendlich viele, eine $(2n-2)$ -fa-
che Mannigfaltigkeit bildende Stellen, an
denen die Function $f(x_1, \dots, x_n)$ den Werth ∞
hat, während sie sich an allen übrigen
Stellen des genannten Bereiches regulär
verhält.

Hat endlich $f(x_1, \dots, x_n)$ an der Stelle $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$
keinen bestimmten Werth, so giebt es in
jeder Umgebung dieser Stelle nicht nur
unendlich viele andere singuläre Stel-
len, an denen $f(x_1, \dots, x_n)$ den Werth ∞ hat -
was schon vorher nachgewiesen ist, - son-

derm auch, wenn $n > 2$ ist, unendlich viele Stellen, an denen $f(x_1, \dots, x_n)$ keinen bestimmten Werth hat. Das Letztere lässt sich folgendermaßen zeigen:

Es gelte für alle Werthsysteme (x_1, \dots, x_n) in der Umgebung von $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ die Gleichung

$$\varphi_0(x_1 - \alpha_1, \dots, x_n - \alpha_n) f(x_1, \dots, x_n) = \varphi_1(x_1 - \alpha_1, \dots, x_n - \alpha_n),$$

unter der gestellten Annahme, dass die Potenzreihen φ_0, φ_1 keinen an der Stelle $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ verschwindenden gemeinschaftlichen Theiler haben. Innerhalb des gemeinschaftlichen Convergenzberichts der beiden Reihen nehme man eine Stelle $(\alpha'_1, \dots, \alpha'_n)$ zunächst beliebig an, und setze:

$$x_1 - \alpha_1 = \xi_1, \dots, x_n - \alpha_n = \xi_n$$

$$x_1 - \alpha'_1 = \xi'_1, \dots, x_n - \alpha'_n = \xi'_n$$

Ferner sei c_k der Werth von ξ_k für $x_k = \alpha'_k$, $\eta_k = \xi_k - c_k$, so sind ξ_k, η_k lineare Funktionen von x_k , die beide für $x_k = \alpha'_k$ verschwinden, man hat daher

$$\eta_k = \frac{h_k \xi'_k}{1 + l_k \xi'_k}, \quad \xi'_k = \frac{\eta_k}{h_k - l_k \eta_k}, \quad (k = 1, \dots, n)$$

wo h_k, l_k Constanten bezeichnen. (Wenn α_k nicht ∞ ist, so ist $h_k = 1, l_k = 0$).

Entwickelt man nun

$$\varphi_0(c_1 + \eta_1, \dots, c_n + \eta_n), \varphi_1(c_1 + \eta_1, \dots, c_n + \eta_n)$$

nach Potenzen von η_1, \dots, η_n und verwandelt die

so sich ergebenden Reihen in Potenzreihen
von ξ'_1, \dots, ξ'_n , die mit

$$\mathcal{P}_2(\xi'_1, \dots, \xi'_n), \mathcal{P}_3(\xi'_1, \dots, \xi'_n)$$

berechnet werden mögen, so gelten für alle
einer bestimmten Umgebung der Stelle $(\alpha'_1, \dots, \alpha'_n)$
angehörigen Werthsysteme (x_1, \dots, x_n) die Glei-
chungen

$$\mathcal{P}_0(x_1 - \alpha_1, \dots, x_n - \alpha_n) = \mathcal{P}_2(x_1 - \alpha'_1, \dots, x_n - \alpha'_n),$$

$$\mathcal{P}_1(x_1 - \alpha_1, \dots, x_n - \alpha_n) = \mathcal{P}_3(x_1 - \alpha'_1, \dots, x_n - \alpha'_n),$$

$$\mathcal{P}_2(x_1 - \alpha'_1, \dots, x_n - \alpha'_n) f(x_1, \dots, x_n) = \mathcal{P}_3(x_1 - \alpha'_1, \dots, x_n - \alpha'_n)$$

Nun nehme man — was dem am Schlusse
von N. 2 Bewiesenen zufolge stets angeht —
n positive Größen C_1, \dots, C_n so an, dass erstens
die Stelle $(\xi_1 = C_1, \dots, \xi_n = C_n)$ im gemeinschaft-
lichen Convergenzbezirk der Reihen $\mathcal{P}_0(\xi_1, \dots, \xi_n)$,
 $\mathcal{P}_1(\xi_1, \dots, \xi_n)$ liegt, und dass zweitens, wenn man
 C_1, \dots, C_n den Bedingungen

$$|C_i| \leq C_1, \dots, |C_n| \leq C_n$$

unterwirft, $\mathcal{P}_0(C_1 + \eta_1, \dots, C_n + \eta_n)$, $\mathcal{P}_1(C_1 + \eta_1, \dots, C_n + \eta_n)$
als Potenzreihen von η_1, \dots, η_n betrachtet, kei-
nen an der Stelle $(\eta_1 = 0, \dots, \eta_n = 0)$ verschwin-
denden gemeinschaftlichen Theiler haben.
Dann besitzen auch die Reihen $\mathcal{P}_2(x_1 - \alpha'_1, \dots, x_n - \alpha'_n)$
und $\mathcal{P}_3(x_1 - \alpha'_1, \dots, x_n - \alpha'_n)$, wie sofort erhellt, kei-
nen an der Stelle $(x_1 = \alpha'_1, \dots, x_n = \alpha'_n)$ verschwin-
denden gemeinschaftlichen Theiler, und es
hat daher nach dem vorhin Bewiesenen

$f(x_1, \dots, x_n)$ an der Stelle (a'_1, \dots, a'_n) keinen bestimmten Werth, wenn $\mathcal{P}_2(0, \dots, 0), \mathcal{P}_3(0, \dots, 0)$ beide gleich Null sind. Es giebt aber, wenn $n \geq 2$ ist, wie am Schlusse von § 2 gezeigt worden ist, unendlich viele, den vorstehenden Bedingungen genügende Werthsysteme (c_1, \dots, c_n) , für welche die beiden Gleichungen

$$\mathcal{P}_0(c_1, \dots, c_n) = 0, \quad \mathcal{P}_1(c_1, \dots, c_n) = 0$$

bestehen; jedem dieser Werthsysteme, deren Gesamtheit eine $(2n-4)$ -fache Mannigfaltigkeit bildet, entspricht also im Gebiete der Größen x_1, \dots, x_n innerhalb des durch die Bedingungen

$$|x_1 - a_1| \leq C_1, \dots, |x_n - a_n| \leq C_n$$

definierten Bezirkes eine Stelle (a'_1, \dots, a'_n) , an der $f(x_1, \dots, x_n)$ keinen bestimmten Werth hat.

Hieran knüpft sich noch eine wichtige Bemerkung:

Es seien zwei beliebige Potenzreihen

$$\mathcal{P}_0(x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n), \quad \mathcal{P}_1(x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n)$$

gegeben, so läßt sich für die dem Innern des gemeinschaftlichen Convergenzbezirkes der beiden Reihen angehörigen Stellen (x_1, \dots, x_n) deren Gesamtheit mit G bezeichnet werde, eine eindeutige Function $f(x_1, \dots, x_n)$ in folgender Weise definiren:

Set x'_1, \dots, x'_n eine Stelle von G , an der $\mathcal{P}_0, \mathcal{P}_1$

nicht beide verschwinden, so soll

$$f(x'_1, \dots, x'_n) = \frac{\mathcal{P}_1(x'_1 - \alpha_1, \dots, x'_n - \alpha_n)}{\mathcal{P}_0(x'_1 - \alpha_1, \dots, x'_n - \alpha_n)}$$

sein.

Ist aber an einer Stelle (x'_1, \dots, x'_n) sowohl \mathcal{P}_1 als \mathcal{P}_0 den Werth Null, so bringe man auf die im Vorhergehenden angegebene Weise

$$\mathcal{P}_0(x_1 - \alpha_1, \dots, x_n - \alpha_n) \text{ auf die Form } \mathcal{P}_2(x_1 - x'_1, \dots, x_n - x'_n) \mathcal{P}_4(x_1 - x'_1, \dots, x_n - x'_n) \\ \mathcal{P}_1(x_1 - \alpha_1, \dots, x_n - \alpha_n) \sim \mathcal{P}_3(x_1 - x'_1, \dots, x_n - x'_n) \mathcal{P}_5(x_1 - x'_1, \dots, x_n - x'_n),$$

in der Art, dass die Reihen $\mathcal{P}_2, \mathcal{P}_3$ keinen an der Stelle $(x_1 = x'_1, \dots, x_n = x'_n)$ verschwindenden gemeinsamen Theiler haben.

Wenn dann

$$\mathcal{P}_2(0, \dots, 0), \mathcal{P}_3(0, \dots, 0)$$

nicht beide gleich Null sind, so soll

$$f(x'_1, \dots, x'_n) = \frac{\mathcal{P}_3(0, \dots, 0)}{\mathcal{P}_2(0, \dots, 0)}$$

sein. Dagegen soll, wenn sowohl

$\mathcal{P}_3(0, \dots, 0) = 0$ als $\mathcal{P}_2(0, \dots, 0) = 0$ ist, $f(x_1, \dots, x_n)$ an der Stelle (x'_1, \dots, x'_n) keinen bestimmten Werth haben.

Dies lässt sich auch so ausdrücken. Ist (x'_1, \dots, x'_n) irgend eine bestimmte Stelle von G , so kann man stets zwei Potenzreihen

$$\mathcal{P}_2(x_1 - x'_1, \dots, x_n - x'_n), \mathcal{P}_3(x_1 - x'_1, \dots, x_n - x'_n)$$

ohne einen an der Stelle $(x_1 = x'_1, \dots, x_n = x'_n)$ ver-

schwindenden gemeinschaftlichen Theiler so bestimmen, dass an allen einer bestimmten Umgebung der Stelle (x'_1, \dots, x'_n) angehörigen Stellen die Gleichung

$$\mathcal{P}_3(x_1 - x'_1, \dots, x_n - x'_n) \mathcal{P}_0(x_1 - \alpha_1, \dots, x_n - \alpha_n) = \mathcal{P}_2(x_1 - x'_1, \dots, x_n - x'_n) \mathcal{P}_1(x_1 - \alpha_1, \dots, x_n - \alpha_n)$$

besteht. Dann ist

$$f(x'_1, \dots, x'_n) = \frac{\mathcal{P}_3(0, \dots, 0)}{\mathcal{P}_2(0, \dots, 0)}$$

zu setzen, mit der Maßgabe, dass, wenn so dargestellt $f(x'_1, \dots, x'_n)$ in der Form $\frac{g}{h}$ erscheint, der Function f an der Stelle (x'_1, \dots, x'_n) kein bestimmter Werth beizulegen ist.

Es ist nun zu zeigen, dass die so definierte Function $f(x_1, \dots, x_n)$ innerhalb des Bereiches G eine eindeutige analytische Function ist, für welche diejenigen Stellen, an denen sie der gegebenen Definition gemäß den Werth ∞ heisst oder unbestimmt ist, anwesentliche singuläre Stellen in dem oben festgestellten Sinne sind, während sie an allen übrigen Stellen sich regulär verhalten.

Es sei (x'_1, \dots, x'_n) irgend eine bestimmte Stelle von G , und

$$\mathcal{P}_0(x_1 - \alpha_1, \dots, x_n - \alpha_n) = \mathcal{P}_2(x_1 - x'_1, \dots, x_n - x'_n) \cdot \mathcal{P}_4(x_1 - x'_1, \dots, x_n - x'_n)$$

$$\mathcal{P}_1(x_1 - \alpha_1, \dots, x_n - \alpha_n) = \mathcal{P}_3(x_1 - x'_1, \dots, x_n - x'_n) \cdot \mathcal{P}_4(x_1 - x'_1, \dots, x_n - x'_n),$$

wo $\mathcal{P}_2, \mathcal{P}_3, \mathcal{P}_4$ dieselbe Bedeutung wie im Vorstehenden

Dann haben, und \mathcal{P}_4 sich auf eine Constante
 reduciren können. Nach dem oben Be-
 wiesenen kann man nun eine Umge-
 bung der Stelle (x'_1, \dots, x'_n) so bestimmen, dass,
 wenn (x''_1, \dots, x''_n) eine bestimmte Stelle dieser
 Umgebung ist, und man aus $\mathcal{P}_2, \mathcal{P}_3, \mathcal{P}_4$ die
 drei Potenzreihen $\bar{\mathcal{P}}_2, \bar{\mathcal{P}}_3, \bar{\mathcal{P}}_4$ von $x_1 - x'_1, \dots, x_n - x'_n$
 ableitet, für welche bei hinlänglich klein-
 en Werthen dieser Differenzen, die Gleichun-
 gen

$$\mathcal{P}_2(x_1 - x'_1, \dots, x_n - x'_n) = \bar{\mathcal{P}}_2(x_1 - x'_1, \dots, x_n - x'_n)$$

$$\mathcal{P}_3(x_1 - x'_1, \dots, x_n - x'_n) = \bar{\mathcal{P}}_3(x_1 - x'_1, \dots, x_n - x'_n)$$

$$\mathcal{P}_4(x_1 - x'_1, \dots, x_n - x'_n) = \bar{\mathcal{P}}_4(x_1 - x'_1, \dots, x_n - x'_n)$$

bestehen, die beiden Reihen $\bar{\mathcal{P}}_2, \bar{\mathcal{P}}_3$ keinen an
 der Stelle $(x_1 = x'_1, \dots, x_n = x'_n)$ verschwindenden
 gemeinschaftlichen Theiler besitzen. Wenn
 dann $f(x''_1, \dots, x''_n)$ einen bestimmten endli-
 chen Werth hat, so ist

$$f(x''_1, \dots, x''_n) = \frac{\bar{\mathcal{P}}_3(0, \dots, 0)}{\bar{\mathcal{P}}_2(0, \dots, 0)} = \frac{\mathcal{P}_3(x''_1 - x'_1, \dots, x''_n - x'_n)}{\mathcal{P}_2(x''_1 - x'_1, \dots, x''_n - x'_n)}$$

d. h. es gilt die Gleichung

$$f(x_1, \dots, x_n) = \frac{\mathcal{P}_3(x_1 - x'_1, \dots, x_n - x'_n)}{\mathcal{P}_2(x_1 - x'_1, \dots, x_n - x'_n)}$$

innerhalb einer gewissen Umgebung
 der Stelle (x'_1, \dots, x'_n) für alle Stellen (x_1, \dots, x_n) ,
 an denen $f(x_1, \dots, x_n)$ einen bestimmten end-
 lichen Werth hat. Wenn daher $\mathcal{P}_2(0, \dots, 0)$ nicht

$= 0$ ist, so verhält sich $f(x_1, \dots, x_n)$ an der Stelle (x'_1, \dots, x'_n) regulär. Ist $\mathcal{P}_2(0, \dots, 0) = 0$, nicht aber $\mathcal{P}_3(0, \dots, 0)$, so kann man die in Rede stehende Umgebung von (x'_1, \dots, x'_n) so klein annehmen, dass an allen Stellen derselben der absolute Betrag von $f(x_1, \dots, x_n)$ größer ist als jede beliebig angenommene endliche Größe, so dass $f(x'_1, \dots, x'_n) = \infty$ zu setzen ist, wie der Ausdruck von $f(x_1, \dots, x_n)$ angibt. Sind endlich $\mathcal{P}_2(0, \dots, 0), \mathcal{P}_3(0, \dots, 0)$ beide gleich Null, so giebt es, wie oben gezeigt worden ist, in jeder noch so kleinen Umgebung von (x'_1, \dots, x'_n) Stellen, an denen die Function $f(x_1, \dots, x_n)$ einen beliebig vorgeschriebenen Werth hat; sie hat also an der Stelle (x'_1, \dots, x'_n) selbst keinen bestimmten Werth.

Damit ist bewiesen, dass die in der angegebenen Weise definierte Function $f(x_1, \dots, x_n)$ innerhalb des Bereiches \mathcal{G} sich überall wie eine rationale Function verhält.

4.

Zur Theorie ganzer eindeutigen Functionen von beliebig vielen Veränderlichen.

Dem Vorstehenden zufolge stellt eine Po.

Der Potenzreihe $\mathcal{P}(x_1, \dots, x_n)$, die für jedes System
endlicher Werthe der Veränderlichen x_1, \dots, x_n
convergiert, eine eindeutige Function
 $f(x_1, \dots, x_n)$ dar, die sich an jeder im Endli-
chen des Größengebiets (x_1, \dots, x_n) liegen-
den Stelle regulär verhält.

Umgekehrt weiß man, dass jede ein-
deutige Function $f(x_1, \dots, x_n)$ die sich an
allen im Endlichen liegenden Stellen
des Gebiets (x_1, \dots, x_n) regulär verhält,
durch eine für jedes System endlicher
Werthe von x_1, \dots, x_n convergirende Reihe
 $\mathcal{P}(x_1, \dots, x_n)$ ausgedrückt werden kann.

Ich nenne eine solche Function $f(x_1, \dots, x_n)$
eine ganze Function. Ist die Reihe,
durch welche sie dargestellt wird, un-
endlich viele Glieder, deren Coefficienten
nicht gleich Null sind, so ist die Function
eine transcendente.

Transcendenten
Def.

Sind ferner zwei Potenzreihen
 $\mathcal{P}_0(x_1, \dots, x_n)$, $\mathcal{P}_1(x_1, \dots, x_n)$ gegeben, welche bei-
de für jedes System endlicher Werthe von
 x_1, \dots, x_n convergiren, so wird durch den
Quotienten

$$\frac{\mathcal{P}_1(x_1, \dots, x_n)}{\mathcal{P}_0(x_1, \dots, x_n)}$$

Den in No 3 festgesetzten Bestimmungen ge-

Frage ob
sich der Satz
umkehren
lässt.

meist eine eindeutige Funktion $f(x_1, \dots, x_n)$ definiert, die dadurch charakterisiert ist, dass sie sich an jeder im Endlichen liegenden Stelle des Größengebietes (x_1, \dots, x_n) wie einer rationalen Funktion verhält.

Ob aber umgekehrt jede eindeutige Funktion $f(x_1, \dots, x_n)$, welche sich im Endlichen überall wie eine rationale Funktion verhält, - also wenn (a_1, \dots, a_n) irgend ein System endlicher Werthe ist, in einer gewissen Umgebung der Stelle (a_1, \dots, a_n) als Quotient zweier Potenzreihen von $x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n$ ausgedrückt werden kann - auch als Quotient zweier für jedes System endlicher Werthe von x_1, \dots, x_n konvergierenden Potenzreihen sich darstellen lasse, das ist eine für Funktionen von mehreren Veränderlichen bis jetzt unentledigte Frage, welche sehr erhebliche Schwierigkeiten darbieten scheint.

Mit dieser Frage ist aber noch eine andere verknüpft.

Frage 2te.

Für jede rationale Funktion von x_1, \dots, x_n gilt, dass sie als Quotient zweier ganzen Funktionen dieser Veränderlichen dargestellt werden kann und ge-

Es war so, dass der Dividend u. der Divi-
sor keinen gemeinschaftlichen Theiler
besitzen. Dann verschwinden Dividend
und Divisor gleichzeitig nur an solchen
Stellen, an denen die Function keinen
bestimmten Werth hat. Es entsteht al-
so die Frage, ob in dem Falle, wo eine
Function als Quotient zweier gewor-
den Functionen von x_1, \dots, x_n , von denen wenig-
stens eine transscendent ist, dargestellt
werden kann, dies auch in der Art ge-
schehen könne, dass der Quotient nur bei
solchen Werthsystemen der Veränderli-
chen, für welche die Function unbestimmt
ist, in der Form $\frac{0}{0}$ erscheint - mit an-
dern Worten, dass aus den Werthen, welche
Dividend u. Divisor an einer bestimmten
Stelle haben, sich unmittelbar entneh-
men lässt, ob an dieser Stelle die Function
einen bestimmten Werth hat oder nicht,
und wie sie sich in der Umgebung dieser
Stelle verhält. Auch diese Frage ist bis
jetzt nur für Functionen von einer
Veränderlichen - und zwar für diese
im bejahenden Sinne - entschieden.

In manchen Fällen, wo eine eindeuti-
ge Function mehrerer Veränderlichen

Durch analytische Bestimmungen definiert ist, ist es aber möglich, die angeregten Fragen mittelst eines Theoremes, das sich im Folgenden ausführlich entwickeln will, zu erledigen.

Es sei jetzt $f(x_1, \dots, x_n)$ eine (transcendente oder rationale) ganze Function. Man setze für x_1, \dots, x_n ganze lineare Functionen einer Veränderlichen t

$$x_1 = a_1 + c_1 t, \dots, x_n = a_n + c_n t,$$

so geht $f(x_1, \dots, x_n)$ in eine ganze Function von t über, welche im Allgemeinen d. h. wenn die Größen c_1, \dots, c_n einer so gleich anzugebenden Beschränkung unterworfen werden - nicht für jeden Werth von t verschwindet. Denn es erhält $f(x_1, \dots, x_n)$ nach Potenzen von $x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n$ entwickelt die Form

$$\sum_{v=0}^{\infty} (x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n)^v,$$

wo $(x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n)^v$ eine homogene ganze Function von $x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n$ bezeichnet, es brauchen also die Größen c_1, \dots, c_n nur die Bedingung zu erfüllen, dass die Ausdrücke

$$(c_1, \dots, c_n)^v$$

nicht alle gleich Null sind. Dies vorausgesetzt, sei in der Entwicklung von

$f(a_1 + c_1 t, \dots, a_n + c_n t)$ nach Potenzen von t
 Das erste Glied, dessen Coefficient nicht ver-
 schwindet, von der Ordnung μ , so hat man

$f(a_1 + c_1 t, \dots, a_n + c_n t) = C_\mu t^\mu + C_{\mu+1} t^{\mu+1} + \dots$,
 wo C_μ nicht gleich Null ist. Daraus ergibt
 sich für hinlänglich kleine Werthe von t

$$\frac{d \log f(a_1 + c_1 t, \dots, a_n + c_n t)}{dt} = \mu t^{-1} + \varphi(t)$$

Setzt man also

$$d \log f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{\alpha=1}^n f_\alpha(x_1, \dots, x_n) dx_\alpha,$$

wo $f(x_1, \dots, x_n), \dots, f_n(x_1, \dots, x_n)$ eindeutige Funk-
 tionen sind, welche sich an jeder im End-
 lichen liegenden Stelle des Gebietes (x_1, \dots, x_n)
 wie rationale Funktionen verhalten
 und den Gleichungen

$$\frac{\partial f_\alpha(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_\beta} = \frac{\partial f_\beta(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_\alpha} \quad \left(\begin{matrix} \alpha = 1, \dots, n \\ \beta = 1, \dots, n \end{matrix} \right)$$

genügen so hat man

$$\sum_{\alpha=1}^n f_\alpha(x_1, \dots, x_n) dx_\alpha = (\mu t^{-1} + \varphi(t)) dt$$

wenn $x_1 = a_1 + c_1 t, \dots, x_n = a_n + c_n t$ gesetzt wird,
 und es ist dann μ stets entweder gleich Null
 oder eine positive ganze Zahl.

Dieser Satz läßt sich nun in folgender
 Weise umkehren:

Es seien n Functionen

$$f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_n(x_1, \dots, x_n)$$

gegeben, welche den folgenden Bedingungen

genügen:

1, Sie sollen eindeutige Funktionen sein, für die wesentliche singuläre Stellen im Endlichen des Größengebietes (x_1, \dots, x_n) nicht existieren.

2, Der Differentialausdruck

$$\sum_{\alpha=1}^n f_{\alpha}(x_1, \dots, x_n) dx_{\alpha}$$

soll die durch die Gleichungen

$$\frac{\partial f_{\alpha}(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_{\beta}} = \frac{\partial f_{\beta}(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_{\alpha}} \quad \left(\begin{matrix} \alpha=1 \dots n \\ \beta=1 \dots n \end{matrix} \right)$$

ausgedrückten Integrabilitätsbedingungen erfüllen:

3, Es soll, wenn man für x_1, \dots, x_n irgend welche ganze lineare Funktionen einer Veränderlichen τ substituiert

$$x_1 = a_1 + c_1 \tau, \dots, x_n = a_n + c_n \tau$$

für hinreichend kleine Werthe von τ

$$\sum_{\alpha=1}^n f_{\alpha}(x_1, \dots, x_n) dx_{\alpha}$$

die Form $(\mu \tau + \psi(\tau)) d\tau$ annehmen, und dann, μ entweder

gleich Null oder eine positive ganze

Zahl sein, vorausgesetzt, dass von

den beiden Potenzreihen von

$x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n$, als deren Quotient

$$\sum_{\alpha=1}^n c_{\alpha} f_{\alpha}(x_1, \dots, x_n)$$

in der Umgebung der Stelle (a_1, \dots, a_n)

$(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ dargestellt werden kann, der Divisor durch die angegebenen Substitutionen nicht identisch gleich Null werde.

Also wenn existiert eine ganze Function $f(x_1, \dots, x_n)$, welche der Differentialgleichung

$$d \log f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{\alpha=1}^{\infty} f_{\alpha}(x_1, \dots, x_n) dx_{\alpha}$$

genügt und völlig bestimmt ist, wenn der Werth irgend eines ihrer Coefficienten, der in Folge der vorstehenden Gleichg. nicht nothwendig gleich Null ist, fixirt wird, was in beliebiger Weise geschehen kann.

Um diesen Satz zu beweisen, nehme ich zuerst an, es sei innerhalb einer bestimmten Umgebung der Stelle $(0, \dots, 0)$ jede Function f_{α} in der Form

$f_{\alpha}(x_1, \dots, x_n) = \tilde{f}_{\alpha}(x_1, \dots, x_n) = \sum_{v=0}^{\infty} (x_1, \dots, x_n)_{\alpha}^v$ darstellbar. Dann ist infolge der Bedingung (2)

$$\frac{\partial (x_1, \dots, x_n)_{\alpha}^v}{\partial x_{\beta}} = \frac{\partial (x_1, \dots, x_n)_{\beta}^v}{\partial x_{\alpha}}$$

Setzt man

$$(x_1, \dots, x_n)^{v+1} = \sum_{\alpha=1}^n \frac{1}{v+1} (x_1, \dots, x_n)_{\alpha}^v x_{\alpha},$$

so ist:

$$d(x_1, \dots, x_n)^{v+1} = \sum_{\alpha=1}^n \left\{ \frac{1}{v+1} (x_1, \dots, x_n)_{\alpha}^v dx_{\alpha} \right\} + \frac{1}{v+1} \sum_{\alpha=1}^n \sum_{\beta=1}^n \frac{\partial (x_1, \dots, x_n)_{\alpha}^v}{\partial x_{\beta}} x_{\alpha} dx_{\beta}$$

Es ist aber

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha=1}^n \sum_{\beta=1}^n \frac{\partial (x_1, \dots, x_n)_\alpha^v}{\partial x_\beta} x_\alpha dx_\beta &= \sum_{\alpha=1}^n \sum_{\beta=1}^n \frac{\partial (x_1, \dots, x_n)_\beta^v}{\partial x_\alpha} x_\alpha dx_\beta \\ &= \sum_{\beta=1}^n v(x_1, \dots, x_n)_\beta^v dx_\beta \\ &= \sum_{\alpha=1}^n v(x_1, \dots, x_n)_\alpha^v dx_\alpha, \end{aligned}$$

und daher

$$\begin{aligned} d(x_1, \dots, x_n)^{v+1} &= \sum_{\alpha=1}^n (x_1, \dots, x_n)_\alpha^v dx_\alpha, \\ \sum_{\alpha=1}^n \sum_{v=0}^{\infty} (x_1, \dots, x_n)_\alpha^v dx_\alpha &= d \sum_{v=0}^{\infty} (x_1, \dots, x_n)^{v+1} \end{aligned}$$

Entwickelt man also, unter C eine willkürlich anzunehmende Constante ver-
stehend, den Ausdruck

$$C e^{\sum_{v=0}^{\infty} (x_1, \dots, x_n)^{v+1}}$$

nach Potenzen von x_1, \dots, x_n , so ergibt die
so sich ergebende Potenzreihe, für $f(x_1, \dots, x_n)$
gesetzt, der in Rede stehenden Differential-
gleichung und ist sicher convergent in
dem gemeinschaftlichen Convergenzbereich
der Entwicklungen von $f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_n(x_1, \dots, x_n)$

Zweitens nehme ich an, man habe für
alle einer bestimmten Umgebung der Stelle
 $(0, \dots, 0)$ angehörigen Werthsysteme (x_1, \dots, x_n)

$$f_\alpha(x_1, \dots, x_n) = \frac{y_\alpha^{(1)}(x_1, \dots, x_n)}{y_\alpha^{(0)}(x_1, \dots, x_n)},$$

wobei ich bemerke, dass es nicht eine noth-
wendige Bedingung ist, dass $y_\alpha^{(0)}(x_1, \dots, x_n)$,

$\varphi_\alpha^{(0)}(x_1, \dots, x_n)$ keinen an der Stelle $(x_1=0, \dots, x_n=0)$ verschwindenden gemeinsamen faktischen Theiler besitzen. Man substituirt nun für x_1, \dots, x_n homogene lineare Funktionen von n anderen Veränderlichen t_1, \dots, t_n

$$x_\alpha = \sum_{\beta=1}^n g_{\alpha\beta} t_\beta \quad (\alpha=1, \dots, n),$$

wodurch sich das Differential

$$\sum_{\alpha=1}^n f_\alpha(x_1, \dots, x_n) dx_\alpha$$

in ein anderes von der Form

$$\sum_{\alpha=1}^n Y_\alpha(t_1, \dots, t_n) dt_\alpha$$

verwandelt, für welches die Integrabilitätsbedingungen ebenfalls erfüllt sind.

Die Constanten $g_{\alpha\beta}$ hat man so anzuwählen, dass die Determinante

$$\begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & \dots & g_{1n} \\ g_{21} & g_{22} & \dots & g_{2n} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ g_{n1} & g_{n2} & \dots & g_{nn} \end{vmatrix}$$

von Null verschieden ist, und bei keiner der Funktionen

$$\varphi_1^{(0)}(g_{11}t_1, \dots, g_{1n}t_n), \dots, \varphi_n^{(0)}(g_{n1}t_1, \dots, g_{nn}t_n)$$

wann man sie nach Potenzen von t_i entwickelt, sämtliche Coefficienten verschwinden.

Dann lässt sich

$$Y_\alpha(t_1, \dots, t_n) \text{ in der Form } \frac{\varphi_\alpha(t_1, \dots, t_n)}{\varphi_0(t_1, \dots, t_n)}$$

Darstellen, und es ist $\varphi_0(t_1, 0, \dots, 0)$ eine Potenzreihe von t_1 , deren Coefficienten nicht sämtlich gleich Null sind. Ist das Anfangsglied dieser Reihe von der Ordnung l , so nehme man eine positive GröÙe δ_1' so an, dass die Stelle $(t_1 = \delta_1', t_2 = 0, \dots, t_n = 0)$ innerhalb des gemeinschaftlichen Convergenzberichts der Reihen

$\varphi_0(t_1, \dots, t_n), \varphi_1(t_1, \dots, t_n), \dots, \varphi_n(t_1, \dots, t_n)$
 liegt, und die Function
 $t_1^{-l} \varphi_0(t_1, 0, \dots, 0)$

für jeden Werth von t_1 , dessen absoluter Betrag nicht größer als δ_1' ist, einen von Null verschwindenden Werth hat. Wird darauf eine zweite positive GröÙe δ_1'' die kleiner als δ_1' ist, beliebig angenommen, so lassen sich $n-1$ andere $\delta_2, \dots, \delta_n$ so bestimmen, dass die Stelle

$(t_1 = \delta_1', t_2 = \delta_2, \dots, t_n = \delta_n)$ innerhalb des gemeinschaftlichen Convergenzberichtes der Reihen $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n$ liegt, und für jedes den Bedingungen:

A) $\delta_1' \geq |t_1| \geq \delta_1'', |t_2| \leq \delta_2, \dots, |t_n| \leq \delta_n$
 genügende Werthsystem (t_1, t_2, \dots, t_n)

$|\varphi_0(t_1, 0, \dots, 0)| > |\varphi_0(t_1, t_2, \dots, t_n) - \varphi_0(t_1, 0, \dots, 0)|$
 ist. Dann giebt es, wie in No 1 gezeigt worden ist, für jedes den Bedingungen

$$B) \quad |t_2| \leq d'_2, \dots, |t_n| \leq d'_n$$

entsprechende Werthsystem (t_2, \dots, t_n) unter denjenigen Werthen von t_2, \dots, t_n , für welche $|t_i| \leq d'_i$ ist, nicht mehr als l , welche der Gleichung

$$\mathcal{P}_0(t_1, t_2, \dots, t_n) = 0$$

genügen, und diese sind ihrem absoluten Betrage nach sämtlich kleiner als d'_1 . Nun sei (t'_2, \dots, t'_n) irgend ein System bestimmter, den Bedingungen $B)$ genügender Werthe von t_2, \dots, t_n , und setze die Gleichung

$$\mathcal{P}_0(t_1, t'_2, \dots, t'_n) = 0$$

von einander verschiedene Wurzeln

$$t'_1, t''_1, \dots, t^{(r)}_1,$$

welche ihrem absoluten Betrage nach kleiner als d'_1 sind. Setzt man dann

$$t_1 = t'_1 + \tau, \quad t_2 = t'_2, \dots, t_n = t'_n,$$

so werden x_1, \dots, x_n ganze lineare Funktionen von τ , welche der oben (unter 3) angegebenen Bedingung genügen, indem

$$\sum_{\alpha=1}^n f_{\alpha}(x_1, \dots, x_n) dx_{\alpha} = \sum_{\alpha=1}^n \frac{\mathcal{P}_{\alpha}(t_1, \dots, t_n)}{\mathcal{P}_0(t_1, \dots, t_n)} dt_{\alpha}$$

ist, und $\mathcal{P}_0(t'_1 + \tau, t'_2, \dots, t'_n)$ nicht für jeden Werth von τ verschwindet. Man erhält also für hinlänglich kleine Werthe von τ

$$\mathcal{P}_1(t'_1 + \tau, t'_2, \dots, t'_n) = \frac{m'}{\tau} + \mathcal{P}'(\tau),$$

wo m' eine ganze Zahl und ≥ 0 ist, und ebenso

$\varphi_i(t_i' + \tau, t_i', \dots, t_n') = \frac{m''}{\tau} + \psi''(\tau), \dots, \varphi_i(t_i^{(r)} + \tau, t_i', \dots, t_n') = \frac{m^{(r)}}{\tau} + \psi^{(r)}(\tau),$
 wo $m'', \dots, m^{(r)}$ gleichfalls ganze, nicht negative Zahlen sind. Daraus folgt, dass die Differenz

$$\varphi_i(t_i, t_i', \dots, t_n') - \left(\frac{m'}{t_i - t_i'} + \frac{m''}{t_i - t_i''} + \dots + \frac{m^{(r)}}{t_i - t_i^{(r)}} \right)$$

für keinen Werth von t_i , dessen absoluter Betrag kleiner als δ_i ist, unendlich groß wird und demgemäß in der Form dargestellt werden kann. Setzt man also:

$$\varphi(t) = (t - t_i')^{m'} (t - t_i'')^{m''} \dots (t - t_i^{(r)})^{m^{(r)}}$$

ergibt sich für jeden der Bedingungen $|t_i| < \delta_i$ genügender Werth von t ,

$$\varphi_i(t_i, t_i', \dots, t_n') = \frac{1}{\varphi(t_i)} \frac{d\varphi(t_i)}{dt_i} + \psi(t_i)$$

Die Function $\varphi(t)$ lässt sich aber ermitteln, ohne dass es nöthig wäre, die Größen $t_i', t_i'', \dots, t_i^{(r)}$ und die zugehörigen Zahlen $m', m'', \dots, m^{(r)}$ zu bestimmen.

Man kann, wenn man die Größen t_1, t_2, \dots, t_n den Bedingungen

$$C) \quad |t_1| \leq \delta_1, \quad |t_2| \leq \delta_2, \quad \dots, \quad |t_n| \leq \delta_n$$

unterwirft, $\varphi_0(t_1, t_2, \dots, t_n)$ in der oben (in N. 1) angegebenen Weise auf die Form

$$\varphi_0(t_1, t_2, \dots, t_n) \bar{\varphi}_0(t_1, \dots, t_n)$$

bringen, in der Art, dass $\bar{\varphi}_0(t_1, \dots, t_n)$ für kein den vorstehenden Bedingungen entsprechendes Werthsystem (t_1, t_2, \dots, t_n) verschwindet. Die Function $\varphi_0(t_1, t_2, \dots, t_n)$ kann dann nicht unendlich klein werden, wenn man die Größen t_1, t_2, \dots, t_n den Bedingungen (A) unterwirft. Für alle diesen Bedingungen genügenden Werthsysteme (t_1, t_2, \dots, t_n) läßt sich deshalb

$$\frac{1}{\varphi_0(t_1, t_2, \dots, t_n)}$$

in eine gleichmäßig convergirende Reihe von der Form

$$\sum_{v=0}^{\infty} T_v t_1^{-l-v}$$

entwickeln, in der die Coefficienten T_v gewöhnliche Potenzreihen von t_2, \dots, t_n sind. Diese Reihe convergirt dann auch als Potenzreihe von t_1, t_2, \dots, t_n betrachtet, bei jeder Anordnung ihrer Glieder. Dasselbe gilt für die gewöhnliche Potenzreihe von t_1, t_2, \dots, t_n , in welche der Quotient

$$\frac{\varphi_1(t_1, \dots, t_n)}{\varphi_0(t_1, \dots, t_n)}$$

verwandelt werden kann; man erhält daher für die jetzt betrachteten Werthsysteme (t_1, \dots, t_n) die Function $\varphi_1(t_1, \dots, t_n)$ dargestellt durch eine bei jeder Anordnung ihrer Glieder

der convergierende Potenzreihe der Größen t_1, t_2, \dots, t_n , welche negative Potenzen von t_1 in unendlicher Anzahl, aber keine negativen Potenzen von t_2, \dots, t_n enthält und somit auf die Form:

$$\sum_{\mu=0}^{\infty} \varphi^{(-\mu-1)}(t_2, \dots, t_n) t_1^{-\mu-1} + \sum_{\nu=0}^{\infty} \varphi^{(\nu)}(t_2, \dots, t_n) t_1^{\nu}$$

gebraucht werden kann.

Anmerkung.

Diese Reihe erhält man auch dadurch, dass man (unter der Annahme $\delta' \geq |t_1| \geq \delta'$) die Funktion $\varphi(t_1, t_2, \dots, t_n)$ als Potenzreihe von t_2, \dots, t_n darstellt und darauf die Coefficienten derselben, welche sämtlich die Form

$$\frac{\varphi(t_1)}{\varphi_0^{(\nu)}(t_1, 0, \dots, 0)}$$

haben, nach steigenden Potenzen von t_1 entwickelt.

Es lässt sich aber auch

$$\frac{1}{\varphi(t_1)} \frac{d\varphi(t_1)}{dt_1} = \frac{m'}{t_1 - t_1'} + \frac{m''}{t_1 - t_1''} + \dots + \frac{m^{(r)}}{t_1 - t_1^{(r)}})$$

wenn $|t_1| \geq \delta'$ ist, in eine Reihe von der Form

$$\sum_{\mu=0}^{\infty} T_{\mu+1} t_1^{-\mu-1}$$

entwickeln, und es ist dann namentlich $T_1' = m' + m'' + \dots + m^{(r)}$ Man hat also

$$\varphi_1(t_1, t_2', \dots, t_n') - \frac{1}{\varphi(t_1)} \frac{d\varphi(t_1)}{dt_1} = \sum_{\mu=0}^{\infty} \left\{ \varphi^{(-\mu-1)}(t_2', \dots, t_n') - T_{\mu+1}' \right\} t_1^{-\mu-1} \\ + \sum_{\nu=0}^{\infty} \varphi^{(\nu)}(t_2', \dots, t_n') t_1^{\nu}$$

Aus dieser Reihe müssen nun dem vorher Bemerkten zufolge alle Glieder mit einem negativen Potenz von t_1 verschwinden, man hat also

$$T_{\mu+1}' = \varphi^{(-\mu-1)}(t_2', \dots, t_n') \quad , \quad (\mu = 0 \dots \infty)$$

Es ist daher $\varphi^{(-1)}(t_2', \dots, t_n')$ für jedes der betrachteten Werthsysteme (t_2, \dots, t_n) eine ganze Zahl. Daraus folgt, dass sich $\varphi^{(-1)}(t_2', \dots, t_n')$ auf ein von t_2, \dots, t_n unabhängiges Glied reduziert. Denn wäre dies nicht der Fall, so würde $\varphi^{(-1)}(t_2', \dots, t_n')$ eine kontinuierliche Function von t_2, \dots, t_n sein, die auch an Dreiecks ganzzahlige Werthe herab könnte. Es ist also die Summe $(m' + m'' + \dots + m^{(n)})$ von dem gewählten Werthsystem (t_2', \dots, t_n') unabhängig und kann gefunden werden, wenn man gleichzeitig $t_2' = 0, \dots, t_n' = 0$ setzt.

Da nun, wenn t_2', \dots, t_n' sämtlich gleich Null gesetzt werden,

$$\varphi_1(t_1, 0, \dots, 0) = \sum_{\mu=0}^{\infty} \varphi^{(-\mu-1)}(0, \dots, 0) t_1^{-\mu-1} + \sum_{\nu=0}^{\infty} \varphi^{(\nu)}(0, \dots, 0) t_1^{\nu} \\ \frac{d\varphi(t_1)}{dt_1} = (m' + m'' + \dots + m^{(n)}) t_1^{-1}$$

ist, und aus der Differenz der Ausdrücke auf der Rechten dieser Gleichungen alle

Glieder mit negativen Potenzen von t ,
wegfallen müssen, so sieht man, dass die
Entwicklung von

$$\varphi(t, 0 \dots 0)$$

für jeden Werth von t , dessen absoluter Be-
trag $\geq \delta$ ist, die Gestalt

$$m t^{-1} + \mathcal{P}(t)$$

hat, wo m eine ganze Zahl bedeutet, die
 ≥ 0 ist, und dass man

$$m' + m'' + \dots + m^{(r)} = m$$

hat. Dabei ist noch zu bemerken, dass m
immer > 0 ist, wenn nicht etwa jede Fun-
ktion $\mathcal{P}_\alpha^{(r)}(x_1, \dots, x_n)$ durch $\mathcal{P}_\alpha^{(0)}(x_1, \dots, x_n)$ theilbar ist,
welcher Fall schon behandelt worden und
hier ausgeschlossen ist.

Nachdem so der Grad der Function $\varphi(t)$
ermittelt ist, setze man

$$\varphi(t) = t^m + \mathcal{T}_1' t^{m-1} + \dots + \mathcal{T}_m'$$

so hat man, zunächst für die der Bedin-

$$\text{gung} \quad \delta \geq |t| \geq \delta'$$

genügenden Werthe von t ,

$$\frac{1}{\varphi(t)} \frac{d\varphi(t)}{dt} = \sum_{\mu=0}^{\infty} \mathcal{T}_{\mu+1}' t^{-\mu-1} = \sum_{\mu=0}^{\infty} \mathcal{P}_{(t_1' \dots t_n')}^{(-\mu-1)} t^{-\mu-1},$$

$$m t^{m-1} + (m-1) \mathcal{T}_1' t^{m-2} + \dots + \mathcal{T}_{m-1}' = (t^m + \mathcal{T}_1' t^{m-1} + \dots + \mathcal{T}_m') \left\{ m t^{-1} + \sum_{\mu=1}^{\infty} \mathcal{P}_{(t_1' \dots t_n')}^{(-\mu-1)} t^{-\mu-1} \right\}$$

Daraus ergeben sich die Gleichungen

$$F_1' + \varphi^{(-2)}(t_2' \dots t_n') = 0$$

$$2 F_2' + F_1' \varphi^{(-2)}(t_2' \dots t_n') + \varphi^{(-3)}(t_2' \dots t_n') = 0$$

$$3 F_3' + F_2' \varphi^{(-2)}(t_2' \dots t_n') + F_1' \varphi^{(-3)}(t_2' \dots t_n') + \varphi^{(-4)}(t_2' \dots t_n') = 0$$

.....

$$m F_m' + F_{m-1}' \varphi^{(-2)}(t_2' \dots t_n') + F_{m-2}' \varphi^{(-3)}(t_2' \dots t_n') + \dots + \varphi^{(-m+1)}(t_2' \dots t_n') = 0$$

Durch diese Gleichungen sind die Größen F_1', \dots, F_m' bestimmt. Substituiert man in den Ausdrücken derselben für t_2', \dots, t_n' die unbestimmten Größen t_2, \dots, t_n , berechnet die Potenzreihe von t_2, \dots, t_n , in welche F_m' dadurch übergeht, mit

$$F_m(t_2, \dots, t_n)$$

und setzt

$$\varphi(t_1, t_2, \dots, t_n) = t_1^m + F_1(t_2, \dots, t_n) t_1^{m-1} + \dots + F_m(t_2, \dots, t_n),$$

so ist durch das Vorstehende bewiesen, dass für jedes den angegebenen Bedingungen entsprechende Werthsystem (t_1, t_2, \dots, t_n)

$$\varphi_1(t_1, t_2, \dots, t_n) - \frac{\partial \log \varphi(t_1, t_2, \dots, t_n)}{\partial t_1} = \sum_{v=0}^{\infty} \varphi^{(v)}(t_2, \dots, t_n) t_1^v$$

ist. Da aber die Reihe auf der Rechten dieser Gleichung keine negativen Potenzen von t_1 enthält, so convergirt sie für jedes den Bedingungen (C) genügende Werthsystem (t_1, t_2, \dots, t_n) , und zwar, wie aus ihrer Entstehungsweise hervorgeht, unabhängig von der Anordnung ihrer Glieder. Dasselbe gilt von den Reihen

$F_1(t_1, \dots, t_n), \dots, F_m(t_1, \dots, t_n)$;
 es gilt somit die vorstehende Gleichung für jedes
 den zuletzt angegebenen Bedingungen entspre-
 chende Werthsystem (t_1, \dots, t_n) .

Nun hat man, wenn $\alpha > 1$ ist,

$$\frac{\partial \varphi_\alpha(t_1, \dots, t_n)}{\partial t_1} = \frac{\partial \varphi_1(t_1, \dots, t_n)}{\partial t_\alpha} = \frac{\partial^2 \log \varphi(t_1, \dots, t_n)}{\partial t_1 \partial t_\alpha} \\ + \frac{\partial}{\partial t_\alpha} \sum_{v=0}^{\infty} \frac{\varphi^{(v)}(t_2, \dots, t_n)}{v!} t_1^v,$$

$$\frac{\partial}{\partial t_1} \left\{ \varphi_\alpha(t_1, \dots, t_n) - \frac{\partial \log \varphi(t_1, \dots, t_n)}{\partial t_\alpha} \right\} = \\ \frac{\partial}{\partial t_1} \sum_{v=0}^{\infty} \left\{ \frac{t_1^{v+1}}{v+1} \frac{\partial \varphi^{(v)}(t_2, \dots, t_n)}{\partial t_\alpha} \right\}.$$

Es lassen sich aber, wenn man t_1, t_2, \dots, t_n
 wieder den Bedingungen (A) unterwirft,

$$\varphi_\alpha(t_1, \dots, t_n) \text{ und } \frac{\partial \log \varphi(t_1, \dots, t_n)}{\partial t_\alpha}$$

in Reihen von derselben Form, wie die im
 Vorgehenden für $\varphi_1(t_1, \dots, t_n)$ eingegebene ent-
 wickeln. Die vorstehende Gleichung lehrt nun,
 dass in der Differenz dieser beiden Reihen Glie-
 der mit einer negativen Potenz von t_1 nicht
 vorkommen, und dass man

$$\varphi_\alpha(t_1, \dots, t_n) - \frac{\partial \log \varphi(t_1, \dots, t_n)}{\partial t_\alpha} = \varphi_\alpha^{(0)}(t_2, \dots, t_n) - \varphi_\alpha^{(0)}(t_2, \dots, t_n) \\ + \sum_{v=0}^{\infty} \frac{t_1^{v+1}}{v+1} \frac{\partial \varphi^{(v)}(t_2, \dots, t_n)}{\partial t_\alpha}$$

hat, wo $\varphi_\alpha^{(0)}(t_2, \dots, t_n)$ die Summe der von t_1 un-
 abhängigen Glieder der eben entwickelten Ent-

wirkung von $\varphi_\alpha(t_1, \dots, t_n)$ berechnet und $\varphi_\alpha^{(0)}(t_1, \dots, t_n)$ dieselbe Bedeutung für die Funktion $\frac{\partial \log \varphi(t_1, \dots, t_n)}{\partial t_\alpha}$ hat. Aus der Form der Ausdrücke $\frac{\partial \log \varphi}{\partial t_\alpha}$ auf beiden Seiten dieser Gleichung ergibt sich dann wieder, daß die Gleichung für jedes den Bedingungen (C) entsprechende Werthsystem (t_1, t_2, \dots, t_n) gilt.

Damit ist bewiesen, dass sich

$$\sum_{\alpha=1}^n \varphi_\alpha(t_1, \dots, t_n) dt_\alpha$$

auf die Form

$$d \log \varphi(t_1, \dots, t_n) + \sum_{\alpha=1}^n \mathcal{P}(t_1, \dots, t_n)_\alpha dt_\alpha$$

bringen läßt. Der Ausdruck unter dem Summenzeichen genügt dann wieder den Integrabilitätsbedingungen und kann nach dem zuerst betrachteten Falle in der Form

$$d \log \mathcal{P}(t_1, \dots, t_n)$$

dargestellt werden, wobei man $\mathcal{P}(0, \dots) = 1$ annehmen kann. Folglich ist, wenn man, unter C eine von Null verschiedene, im übrigen willkürlich anzunehmende Constante verstand,

$$\varphi(t_1, \dots, t_n) = C \varphi(t_1, \dots, t_n) \mathcal{P}(t_1, \dots, t_n)$$

setzt,

$$\sum_{\alpha=1}^n \varphi_\alpha(t_1, \dots, t_n) dt_\alpha = d \log \varphi(t_1, \dots, t_n)$$

ersetzt man nunmehr t_1, \dots, t_n durch x_1, \dots, x_n

aus und setzt

$$\varphi(t_1, \dots, t_n) = f(x_1, \dots, x_n),$$

so ergibt sich

$$\sum_{\alpha=1}^{\infty} f_{\alpha}(x_1, \dots, x_n) dx_{\alpha} = d \log f(x_1, \dots, x_n)$$

Diese Gleichung gilt nun ihrer Herleitung zufolge für alle einer gewissen Umgebung der Stelle $(0, \dots, 0)$ angehörigen Werthsysteme (x_1, \dots, x_n) . Etwas Bestimmteres über den Convergenzberich der Reihe für $f(x_1, \dots, x_n)$ läßt sich durch die gegebene Deduction nicht ermitteln, weil bei derselben nur vorausgesetzt ist, dass die Functionen $f_{\alpha}(x_1, \dots, x_n)$ innerhalb einer begrenzten Umgebung der Stelle $(0, \dots, 0)$ überall eindeutig definiert seien und sich wie rationale Functionen verhalten, gleichwohl reicht der in der vorstehenden Gleichung ausgesprochene Satz aus, um für den Fall, wo die Functionen $f_{\alpha}(x_1, \dots, x_n)$ sich an allen im Endlichen des Größengebietes (x_1, \dots, x_n) liegenden Stellen wie rationale Functionen verhalten, das oben ausgesprochene Theorem zu beweisen.

Es sei $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ ein System bestimmter, endlicher Werthe von x_1, \dots, x_n , und man nehme an, es convergire die auf die beschriebene Weise hergeleitete Reihe $f(x_1, \dots, x_n)$ (in der wir uns jetzt für die Constante C einen bestimmten Werth gesetzt denken) für jedes den Bedingungen

$$|x_1| < |\alpha_1|, \dots, |x_n| < |\alpha_n|$$

genügende Wertsystem (x_1, \dots, x_n) . - Ferner sei $(\alpha'_1, \dots, \alpha'_n)$ irgend ein bestimmtes Wertsystem, das den Bedingungen

$$|\alpha'_1| = |\alpha_1|, \dots, |\alpha'_n| = |\alpha_n|$$

gemäß, im Übrigen aber beliebig angenommen ist. Dann kann man innerhalb einer bestimmten Umgebung der Stelle $(\alpha'_1, \dots, \alpha'_n)$

$$f_\alpha(x_1, \dots, x_n) \text{ in der Form } \frac{\varphi_\alpha^{(1)}(x_1 - \alpha'_1, \dots, x_n - \alpha'_n)}{\varphi_\alpha^{(0)}(x_1 - \alpha'_1, \dots, x_n - \alpha'_n)}$$

darstellen und nach dem Vorhergehenden eine

$$\text{Reihe } \varphi(x_1 - \alpha'_1, \dots, x_n - \alpha'_n)$$

ableiten, welche der Gleichung

$$d \log. \varphi(x_1 - \alpha'_1, \dots, x_n - \alpha'_n) = \sum_{\alpha} \frac{\varphi_\alpha^{(1)}(x_1 - \alpha'_1, \dots, x_n - \alpha'_n)}{\varphi_\alpha^{(0)}(x_1 - \alpha'_1, \dots, x_n - \alpha'_n)} dx_\alpha$$

genügt. Diese Reihe möge konvergieren an allen Stellen, für die

$$|x_1 - \alpha'_1| < \delta, \dots, |x_n - \alpha'_n| < \delta$$

ist, wo δ eine positive Größe bedeutet. Unter diesen Stellen giebt es nun auch solche - und zwar bilden dieselben ein $2n$ -fach ausgedehntes Continuum -, welche zugleich den Bedingungen

$$|x_1| < |\alpha_1|, \dots, |x_n| < |\alpha_n|$$

genügen. Innerhalb des Bereiches dieser Stellen hat man also

$$d \log. \varphi(x_1 - \alpha'_1, \dots, x_n - \alpha'_n) = \sum_{\alpha=1}^n f_\alpha(x_1, \dots, x_n) dx_\alpha$$

$$d \log. f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{\alpha=1}^n f_\alpha(x_1, \dots, x_n) dx_\alpha$$

$$\frac{d\mathcal{P}(x_1 - \alpha'_1, \dots, x_n - \alpha'_n)}{\mathcal{P}(x_1 - \alpha'_1, \dots, x_n - \alpha'_n)} = \frac{df(x_1, \dots, x_n)}{f(x_1, \dots, x_n)},$$

woraus sich, da die Funktionen $f(x_1, \dots, x_n)$, $\mathcal{P}(x_1 - \alpha'_1, \dots, x_n - \alpha'_n)$ innerhalb des im Rede stehenden Bereichs an allen Stellen sich regulär verhalten

$$f(x_1, \dots, x_n) = C' \mathcal{P}(x_1 - \alpha'_1, \dots, x_n - \alpha'_n)$$

ergibt, wo C' eine von x_1, \dots, x_n unabhängige GröÙe bedeutet. Da dies für jedes den angegebenen Bedingungen entsprechende Werthsystem $(\alpha'_1, \dots, \alpha'_n)$ gilt, so folgt daraus (nach einem der Sätze, welche in der Functionentheorie im Betreff der Convergenzbedingungen von Potenzreihen entwickelt werden), dass die Reihe auch noch convergirt für jedes den Bedingungen

$$|x_1| < |\alpha_1| + \delta, \dots, |x_n| < |\alpha_n| + \delta$$

genügende Werthsystem (x_1, \dots, x_n) . Daraus ergibt sich sofort, dass die Reihe $f(x_1, \dots, x_n)$ für jedes System endlicher Werthe von x_1, \dots, x_n convergirt und die Gleichung

$$\sum_{\alpha=1}^{\infty} f_{\alpha}(x_1, \dots, x_n) dx_{\alpha} = d \log f(x_1, \dots, x_n)$$

befriedigt.

Man sieht zugleich, wie sich die in $f(x_1, \dots, x_n)$ vorkommende Constante C zu bestimmen läuft, dass einer der Coefficienten der Reihe, welcher nicht nothwendig bei jedem Werth

von 1 gleich Null ist, einen vorgeschriebenen Werth erhält.

Es bedarf kaum der Erinnerung, dass in einem gegebenen Falle die Entwicklung der Reihe $f(x_1, \dots, x_n)$ nicht notwendig auf dem beschriebenen Wege bewerkstelligt zu werden braucht. Vielmehr kann man, nachdem einmal durch das Vorstehende die Form und der Convergenzbezirk der Reihe festgestellt worden sind, jedes zur Bestimmung ihrer Coefficienten führende Verfahren, ohne Verstoß gegen die Strenge der Herleitung anwenden.

5.

An das im Vorstehenden entwickelte Theorem schließt sich nun ein anderes an, durch welches in manchen Fällen für eine eindeutige Function $f(x_1, \dots, x_n)$, welche an allen im Endlichen des Größengebietes (x_1, \dots, x_n) liegenden Stellen sich wie eine rationale Function verhält, der Nachweis geführt werden kann, dass sie als Quotient zweier (transcendenten oder rationalen) ganzen Functionen von x_1, \dots, x_n darstellbar ist und zwar in der Art, dass nur an diejenigen Stellen, wo $f(x_1, \dots, x_n)$ keinen bestimmten Werth hat, der Dividend sowohl als der Divisor verschwindet.

Angenommen, es sei eine bestimmte Funktion $f(x_1, \dots, x_n)$ in der angegebenen Weise als Quotient zweier ganzen Funktionen $g_1(x_1, \dots, x_n)$, $g_0(x_1, \dots, x_n)$ ausgedrückt, so hat man, wenn

$$\frac{\partial \log g_0(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_\alpha} = f_\alpha^{(0)}(x_1, \dots, x_n)$$

$$\frac{\partial \log g_1(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_\alpha} = f_\alpha^{(1)}(x_1, \dots, x_n)$$

gesetzt wird,

$$d \log f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{\alpha=1}^n f_\alpha^{(1)}(x_1, \dots, x_n) dx_\alpha - \sum_{\alpha=1}^n f_\alpha^{(0)}(x_1, \dots, x_n) dx_\alpha,$$

und es besitzen die Funktionen $f_\alpha^{(0)}$, $f_\alpha^{(1)}$ folgende Eigenschaften:

1, Sie sind alle eindeutige Funktionen von x_1, \dots, x_n , welche sich im Endlichen genau überall wie rationale Funktionen verhalten.

2, Die Differentialausdrücke

$$\sum_{\alpha=1}^n f_\alpha^{(1)}(x_1, \dots, x_n) dx_\alpha, \quad \sum_{\alpha=1}^n f_\alpha^{(0)}(x_1, \dots, x_n) dx_\alpha$$

genügen beide den Integrabilitätsbedingungen.

3, Jede im Endlichen gelegene singuläre Stelle einer der Funktionen $f_\alpha^{(0)}(x_1, \dots, x_n)$ ist zugleich eine singuläre Stelle der Funktion $f(x_1, \dots, x_n)$; jede im Endlichen gelegene singuläre Stelle einer der Funktionen $f_\alpha^{(1)}(x_1, \dots, x_n)$ ist entweder eine Null-Stelle von

$f(x_1, \dots, x_n)$ oder eine derjenigen singulären Stellen dieser Funktion, an denen sie keinen bestimmten Werth hat.

Dies Theorem - dessen Beweis auf der Hand liegt - lässt sich folgendermaßen umkehren.

Angenommen, man wisse von einer irgendwie definierten Funktion $f(x_1, \dots, x_n)$ dass sie eine eindeutige Funktion der hier betrachteten Art sei, und es gelinge, das Differential

$$d \log f(x_1, \dots, x_n)$$

in der Form

$$\sum_{\alpha=1}^n f_{\alpha}^{(1)}(x_1, \dots, x_n) dx_{\alpha} = \sum_{\alpha=1}^n f_{\alpha}^{(2)}(x_1, \dots, x_n) dx_{\alpha}$$

dergestalt ausdrücken, dass die Funktionen $f_{\alpha}^{(1)}, f_{\alpha}^{(2)}$ die im Vorstehenden (unter 1, 2, 3) angegebenen Eigenschaften besitzen, so sind diese Funktionen auch so beschaffen, dass sich auf die in Nr. 4 gelehnte Weise zwei ganze Funktionen $g_0(x_1, \dots, x_n), g_1(x_1, \dots, x_n)$ bestimmen lassen, welche die Gleichungen

$$A) \quad d \log g_0(x_1, \dots, x_n) = \sum_{\alpha=1}^n f_{\alpha}^{(1)}(x_1, \dots, x_n) dx_{\alpha}$$

$$d \log g_1(x_1, \dots, x_n) = \sum_{\alpha=1}^n f_{\alpha}^{(2)}(x_1, \dots, x_n) dx_{\alpha}$$

befriedigen. Dann ist

$$B) \quad f(x_1, \dots, x_n) = C \frac{g_1(x_1, \dots, x_n)}{g_0(x_1, \dots, x_n)}$$

wo C eine von x_1, \dots, x_n unabhängige GröÙe bezeichnet, und es verschwinden g_0, g_1 gleichzeitig nur an solchen Stellen (x_1, \dots, x_n) , wo $f(x_1, \dots, x_n)$

Keinen bestimmten Werth hat.

Es sei $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ irgendein System endlicher Werthe der Größen x_1, \dots, x_n , so giebt es - nach Nr. 2 - eine gewisse Umgebung (\mathcal{L}) der Stelle $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, innerhalb welcher jede der Funktionen $f, f^{(1)}, \dots, f_n^{(1)}, f, \dots, f_n$ sich als Quotient zweier Potenzreihen von $x_1 - \alpha_1, \dots, x_n - \alpha_n$ in der Art darstellen lässt, dass der Divisor u. der Divisor nur an solchen Stellen (x_1, \dots, x_n) , wo die betreffende Funktion keinen bestimmten Werth hat, gleichzeitig verschwinden. Berechnet man für $f, f^{(1)}, f_n^{(1)}$ die Divisoren bez. mit p, p', q' und die Divisoren bez. mit q, p, q , so hat man

$$\sum_{\alpha=1}^n \left(\frac{1}{p} \frac{\partial p}{\partial x_\alpha} - \frac{p'_\alpha}{p_\alpha} \right) dx_\alpha = \sum_{\alpha=1}^n \left(\frac{1}{q} \frac{\partial q}{\partial x_\alpha} - \frac{q'_\alpha}{q_\alpha} \right) dx_\alpha,$$

woraus sich, da die Veränderlichen x_1, \dots, x_n unabhängig von einander sind,

$$\frac{1}{p} \frac{\partial p}{\partial x_\alpha} - \frac{p'_\alpha}{p_\alpha} = \frac{1}{q} \frac{\partial q}{\partial x_\alpha} - \frac{q'_\alpha}{q_\alpha} \quad (\alpha = 1, 2, \dots, n)$$

ergiebt.

Der Voraussetzung (3) nach kann q_α innerhalb des Bereiches (\mathcal{L}) nur an solchen Stellen (x_1, \dots, x_n) verschwinden, die zugleich singuläre Stellen der Funktion $\frac{p}{q}$ sind, für welche also $q = 0$ ist. Ebenso kann p_α nur an solchen Stellen verschwinden, an denen $p = 0$ ist. Daraus kann man schließen, dass die Funk.

Lion

$$\frac{1}{q} \frac{\partial q}{\partial x_\alpha} - \frac{q'_\alpha}{q_\alpha}$$

sich innerhalb (L) regulär verhält. Denn wäre dies nicht der Fall, so hätte sie (nach № 3) innerhalb (L) unendlich viele singuläre Stellen, und unter diesen gäbe es unendlich viele, an denen $q=0$ wäre, außer, und somit auch p_α , einen von Null verschiedenen Werth besäße, was der Gleichung:

$$\frac{1}{q} \frac{\partial q}{\partial x_\alpha} - \frac{q'_\alpha}{q_\alpha} = \frac{1}{p} \frac{\partial p}{\partial x_\alpha} - \frac{p'_\alpha}{p_\alpha}$$

widersprechen würde. Man kann also für die dem Bereiche (L) angehörigen Werthsysteme (x_1, \dots, x_n)

$$\frac{1}{q} \frac{\partial q}{\partial x_\alpha} - \frac{q'_\alpha}{q_\alpha} = \mathcal{P}_\alpha(x_1 - \alpha_1, \dots, x_n - \alpha_n)$$

setzen und hat dann

$$\sum_{\alpha=1}^n \int_\alpha^{(0)} f_\alpha(x_1, \dots, x_n) dx_\alpha = d \log q - \sum_{\alpha=1}^n \int_\alpha \mathcal{P}_\alpha(x_1 - \alpha_1, \dots, x_n - \alpha_n) dx_\alpha$$

$$\sum_{\alpha=1}^n \int_\alpha^{(0)} f_\alpha(x_1, \dots, x_n) dx_\alpha = d \log p - \sum_{\alpha=1}^n \int_\alpha \mathcal{P}_\alpha(x_1 - \alpha_1, \dots, x_n - \alpha_n) dx_\alpha$$

Der Differentialausdruck auf der rechten Seite dieser Gleichungen genügt nun den Integrabilitätsbedingungen, man kann ihn daher in der Form

$$d \mathcal{P}(x_1 - \alpha_1, \dots, x_n - \alpha_n)$$

Darstellen und erhält dann

$$\sum_{\alpha=1}^n \int_\alpha^{(0)} f_\alpha(x_1, \dots, x_n) dx_\alpha = d \log \left\{ q \cdot e^{-\mathcal{P}(x_1 - \alpha_1, \dots, x_n - \alpha_n)} \right\} = d \log \mathcal{P}^{(0)}(x_1 - \alpha_1, \dots, x_n - \alpha_n)$$

$$\sum_{\alpha=1}^n f_{\alpha}^{(0)}(x_1, \dots, x_n) dx_{\alpha} = d \log \left\{ p \cdot e^{-P(x_1 - \alpha_1, \dots, x_n - \alpha_n)} \right\} = d \log P^{(0)}(x_1 - \alpha_1, \dots, x_n - \alpha_n)$$

Es sind also die Funktionen $f_{\alpha}^{(0)}(x_1, \dots, x_n), f_{\alpha}^{(1)}(x_1, \dots, x_n)$ in der That zu beschaffen, dass man (nach No. 4) zwei ganze Funktionen $g_0(x_1, \dots, x_n), g_1(x_1, \dots, x_n)$ bestimmen kann, für welche - bei gehöriger Bestimmung der Constante C - die vorstehenden Gleichungen (A, B) gelten. In der Umgebung jeder bestimmten Stelle $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ ist dann

$$g_0(x_1, \dots, x_n) = C_1 \cdot q \cdot e^{-P(x_1 - \alpha_1, \dots, x_n - \alpha_n)}$$

$$g_1(x_1, \dots, x_n) = C_2 \cdot p \cdot e^{-P(x_1 - \alpha_1, \dots, x_n - \alpha_n)}$$

wo C_1, C_2 Constanten bezeichnen, es verschwinden daher g_0, g_1 gleichzeitig an der Stelle $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ nur dann, wenn auch p, q an derselben beide verschwinden, $f(x_1, \dots, x_n)$ also für das Werthsystem $(x_1 - \alpha_1, \dots, x_n - \alpha_n)$ keinen bestimmten Werth besitzt, w. z. b. w.

Anmerkungen.

- 1) Es ist vorausgesetzt worden, man wisse von der Function $f(x_1, \dots, x_n)$, dass sie eine eindeutige Function sei und im Endlichen sich überall wie eine rationale Function verhalte. Ist dies nicht bekannt, vielmehr die Aufgabe gestellt, die Function so zu bestimmen, dass sie der Differentialgleichung

$$d \log f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{\alpha=1}^n f_{\alpha}^{(1)}(x_1, \dots, x_n) dx_{\alpha} - \sum_{\alpha=1}^n f_{\alpha}^{(0)}(x_1, \dots, x_n) dx_{\alpha}$$

genügte, so hat man zur Lösung dieser Aufgabe kein anderes Mittel, als zu untersuchen, ob jeder der beiden Differentialausdrücke auf der Rechten der Gleichung die in N. 4 von dem dort betrachteten Ausdruck

$$\sum_{\alpha=1}^n f_{\alpha}(x_1, \dots, x_n) dx_{\alpha}$$

vorausgesetzte Beschaffenheit habe, und im Falle, dass sich dies bestätigt und somit feststeht, dass $f(x_1, \dots, x_n)$ in der Form

$$\frac{g_1(x_1, \dots, x_n)}{g(x_1, \dots, x_n)}$$

dargestellt werden kann, sich zu vergewissern, ob die Funktionen $f_{\alpha}^{(0)}$, $f_{\alpha}^{(1)}$ auch der oben (unter 3) angegebenen Bedingung entsprechen.

2. Das im Vorstehenden entwickelte Theorem kann ohne Schwierigkeit folgendermaßen verallgemeinert werden:

Es sei von einer irgendwie definierten Funktion $f(x_1, \dots, x_n)$ bekannt, dass sie sich im Endlichen überall wie eine rationale Funktion verhalte, und es lasse sich

$d^m \log f(x_1, \dots, x_n)$ in der Form

$$d^m \log f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{\alpha_1, \dots, \alpha_m} f_{\alpha_1, \dots, \alpha_m}^{(1)}(x_1, \dots, x_n) dx_{\alpha_1} \dots dx_{\alpha_m} - \sum_{\alpha_1, \dots, \alpha_m} f_{\alpha_1, \dots, \alpha_m}^{(0)}(x_1, \dots, x_n) dx_{\alpha_1} \dots dx_{\alpha_m}$$

($\alpha_1, \dots, \alpha_m = 1, 2, \dots, n$)

dargestellt ausdrücken, dass jeder der beiden Dif-

Differentialausdrücke auf der Rechten der
 Gleichung den Integrabilitätsbedingun-
 gen genüge, und die Funktionen $f_{\alpha_1, \dots, \alpha_m}^{(1)}, f_{\alpha_1, \dots, \alpha_m}^{(2)}$
 die im Vorstehenden unter (1, 3) angegebene
 Berührungseigenschaft besitzen, so ist $f(x_1, \dots, x_n)$ in
 der Form

$$\frac{g_1(x_1, \dots, x_n)}{g_0(x_1, \dots, x_n)}$$

darstellbar, wo g_0, g_1 ganze Funktionen von
 x_1, \dots, x_n sind, welche nur an solchen Stellen
 (x_1, \dots, x_n) , wo $f(x_1, \dots, x_n)$ keinen bestimmten Werth
 hat, gleichzeitig verschwinden.

Der Beweis dieses Satzes ist dem für den Fall
 wo $m=1$ ist, durchgeführten ganz analog,
 braucht dabei nur folgender, leicht abzuleitender
 Hilfsatz vorausgesetzt zu werden:

Genügt ein Differentialausdruck

$$\sum_{\alpha} P_{\alpha_1, \dots, \alpha_m}(x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n) dx_{\alpha_1} \dots dx_{\alpha_m}$$

den Integrabilitätsbedingungen, so kann
 er auf die Form

$$d^m P(x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n)$$

gebracht werden.

3. Auch das in Nr. 2 bewiesene Theorem kann
 folgendermaßen verallgemeinert werden:

Ist ein den Integrabilitätsbedingungen ge-
 nügender Differentialausdruck

$$\sum_{\alpha} f_{\alpha_1, \dots, \alpha_m}(x_1, \dots, x_n) dx_{\alpha_1} \dots dx_{\alpha_m} \quad (\alpha_1, \dots, \alpha_m = 1, \dots, m)$$

gegeben, in welchem die Funktionen $f(x_1, \dots, x_n)$ eindeutige Funktionen der hier betrachteten Art sind und lässt sich zeigen, dass dasselbe, wenn für x_1, \dots, x_n lineare Funktionen einer Veränderlichen gesetzt werden – welche nur der in Nr. 4 für den Fall, wo $m=1$ ist, angegebenen Bedingung unterworfen sind – für hinreichend kleine Werthe von t stets die Gestalt

$$\mu d^m \log t + P(t) dt^m$$

erhält, wo μ entweder gleich 0 oder eine positive ganze Zahl ist, so ist jede der Differentialgleichung

$$d^m \log f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{\alpha_1, \dots, \alpha_m} f_{\alpha_1, \dots, \alpha_m}(x_1, \dots, x_n) dx_{\alpha_1} \dots dx_{\alpha_m}$$

genügende Funktion $f(x_1, \dots, x_n)$ eine ganze Funktion von x_1, \dots, x_n ; und ist eine solche Funktion – $f_0(x_1, \dots, x_n)$ – bestimmt, so erhält man den allgemeinsten Ausdruck von $f(x_1, \dots, x_n)$, wenn man

$$f(x_1, \dots, x_n) = f_0(x_1, \dots, x_n) e^{G(x_1, \dots, x_n)}$$

setzt und für $G(x_1, \dots, x_n)$ eine ganze rationale Funktion $m-1$ ten Grades von x_1, \dots, x_n mit willkürlichen Coefficienten nimmt.

Um diesen Satz beweisen zu können, hat man zunächst zu untersuchen, unter welchen Bedingungen ein gegebener Ausdruck:

$$\sum_{\alpha=1}^n f_{\alpha}(x_1, \dots, x_n) dx_{\alpha},$$

in welchem die Funktionen $f_{\alpha}(x_1, \dots, x_n)$ eindeutige Funktionen der hier betrachteten Art sind, das Differential einer ebenfalls eindeutigen Funktion ist - eine Frage, welche sich mit Hilfe der Ergebnisse der vorhergehenden Untersuchungen ohne Schwierigkeit erledigen lässt, auf die ich aber hier, wo es sich hauptsächlich um eine Zusammenstellung solcher Sätze handelt, die in meiner Vorlesung über die Abelschen Funktionen als Hilfspätze gebraucht werden, nicht eingehe.

6.

Über n -fach periodische ganze Funktionen von n Veränderlichen.

Eine ganze Funktion $f(u_1, \dots, u_n)$ der n Veränderlichen u_1, \dots, u_n sei n -fach periodisch, d. h. es soll n Systeme von je n Konstanten:

$$\begin{array}{cccc} 2\omega_{11}, & 2\omega_{12}, & \dots & 2\omega_{1n} \\ 2\omega_{21}, & 2\omega_{22}, & \dots & 2\omega_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 2\omega_{n1}, & 2\omega_{n2}, & \dots & 2\omega_{nn} \end{array}$$

geben, für welche bei beliebigen Werten von u_1, \dots, u_n die n Gleichungen

$f(u_1 + 2w_{1\beta}, \dots, u_n + 2w_{n\beta}) = f(u_1, \dots, u_n) \quad (\beta = 1, 2, \dots, n)$
 gelten, wobei vorausgesetzt werde, dass die
 Determinante

$$\begin{vmatrix} w_{11} & \dots & w_{1n} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ w_{n1} & \dots & w_{nn} \end{vmatrix}$$

nicht gleich Null sei.

Führt man statt u_1, \dots, u_n andere Ver-
 änderliche v_1, \dots, v_n ein mittels der Glei-
 chungen

$$u_\alpha = \sum_{\beta=1}^n 2w_{\alpha\beta} v_\beta \quad (\alpha = 1, \dots, n)$$

und bezeichnet mit $\varphi(v_1, v_2, \dots, v_n)$ die Funk-
 tion, in welche $f(u_1, \dots, u_n)$ durch diese Sub-
 stitution übergeht, so hat man

$$\varphi(v_1 + 1, v_2, \dots, v_n) = \varphi(v_1, v_2, \dots, v_n)$$

$$\varphi(v_1, v_2 + 1, \dots, v_n) = \varphi(v_1, v_2, \dots, v_n)$$

$$\dots \dots \dots$$

$$\varphi(v_1, v_2, \dots, v_n + 1) = \varphi(v_1, v_2, \dots, v_n),$$

aus welchen Gleichungen sich die allge-
 meinere

$$\varphi(v_1 + m_1, v_2 + m_2, \dots, v_n + m_n) = \varphi(v_1, v_2, \dots, v_n)$$

ergibt, wo m_1, m_2, \dots, m_n beliebige ganze
 Zahlen bedeuten.

Es soll nun bewiesen werden, dass sich
 $\varphi(v_1, v_2, \dots, v_n)$ durch eine beständig kon-
 vergierende Reihe von der Form:

$$\sum_v C_{v_1, v_2, \dots, v_n} e^{2(v_1 v_1 + v_2 v_2 + \dots + v_n v_n) \pi i}$$

$$(v_1, v_2, \dots, v_n = -\infty \dots + \infty)$$

Darstellen laßt, wo die C_{v_1, v_2, \dots, v_n} von $v_1, v_2 \dots v_n$ unabhängige Größen sind.

Es ist leicht, diesen Satz aus dem auf Functionen mehrerer Veränderlichen ausgedehnten Fourier'schen Theoreme abzuleiten. Man setzt zu dem Ende, unter $s_1, \dots, s_n, t_1, \dots, t_n$ reelle Größen verstanden,

$$v_\alpha = t_\alpha + s_\alpha i,$$

so laßt sich $\varphi(t_1 + s_1 i, \dots, t_n + s_n i)$ als Function von t_1, \dots, t_n betrachten, in der Form

$$\sum_v C'_{v_1, \dots, v_n} e^{2(v_1 t_1 + \dots + v_n t_n) \pi i}$$

$$(v_1, \dots, v_n = -\infty \dots + \infty)$$

ausdrücken, wenn man

$$C'_{v_1, \dots, v_n} = \int \dots \int \varphi(t_1 + s_1 i, \dots, t_n + s_n i) e^{-2(v_1 t_1 + \dots + v_n t_n) \pi i} dt_1 \dots dt_n$$

nimmt. Man beweist denn leicht, dass die partiellen Ableitungen der als Function von s_1, \dots, s_n betrachteten Größe

$$C'_{v_1, \dots, v_n} e^{2(v_1 s_1 + \dots + v_n s_n) \pi i}$$

bei der vorausgesetzten Beschränktheit der Function φ sämtlich gleich Null sind, diese Größe also einen von s_1, \dots, s_n unabhängigen Werth hat, woraus sich der angegebene Ausdruck von $\varphi(v_1, \dots, v_n)$ und die Be-

stimmung von C_{v_1, \dots, v_n} , nämlich

$$C_{v_1, \dots, v_n} = \int_0^1 \dots \int_0^1 \varphi(t_1, \dots, t_n) e^{-2(v_1 t_1 + \dots + v_n t_n) \pi i} dt_1 \dots dt_n$$

ergibt.

Die Schwierigkeiten, mit denen eine strenge Begründung des Fourier'schen Theorems für beliebige Funktionen reeller Veränderlichen verknüpft ist, fallen für die Funktion $\varphi(t_1 + s, i, \dots, t_n + s_n, i)$ fort, indem deren Ableitungen stetige Funktionen von t_1, \dots, t_n sind.

Es läßt sich indes der in Rede stehende Ausdruck von $\varphi(v_1, \dots, v_n)$ auch mit Hilfe der Fundamentalsätze der Theorie der gewöhnlichen Potenzreihen ableiten. Dies soll hier ausgeführt werden.

Es sei

$$g(v, x_1, \dots, x_r)$$

eine ganze Funktion der $r+1$ von einander unabhängigen Veränderlichen v, x_1, \dots, x_r und besitze in Beziehung auf die Veränderliche v die Periode 1, so dass, wenn m eine beliebige ganze Zahl ist, die Gleichg.

$$g(v+m, x_1, \dots, x_r) = g(v, x_1, \dots, x_r)$$

besteht. Setzt man dann

$$g_0(v, x_1, \dots, x_r) = \frac{1}{2} g(v, x_1, \dots, x_r) + \frac{1}{2} g(-v, x_1, \dots, x_r),$$

$$g_1(v, x_1, \dots, x_r) = \frac{\frac{1}{2} g(v, x_1, \dots, x_r) - \frac{1}{2} g(-v, x_1, \dots, x_r)}{\sin 2v\pi}$$

so ist nicht nur g_0 , sondern auch g , eine ganze Function von v, x_1, \dots, x_r . Dann der Nenner von g , verschwindet nur, wenn $v = \frac{m}{2}$ und m eine ganze Zahl ist, setzt man also $v = \frac{m}{2} + h$, so ist

$$\sin 2\left(\frac{m}{2} + h\right)\pi = \pm \sin 2h\pi$$

$$g\left(-\frac{m}{2} - h, x_1, \dots, x_r\right) = g\left(\frac{m}{2} - h, x_1, \dots, x_r\right), \text{ also}$$

$$g\left(\frac{m}{2} + h, x_1, \dots, x_r\right) - g\left(\frac{m}{2} - h, x_1, \dots, x_r\right) = h\varphi\left(h, x_1, \dots, x_r\right),$$

und es heisst somit $g_1(v, x_1, \dots, x_r)$ auch für $v = \frac{m}{2}$ einen bestimmten endlichen Werth.

Setzt sei s eine neue unbeschränkt veränderliche Grösse, und es werde eine Function $G_0(s, x_1, \dots, x_r)$ folgendermassen definiert: Jedem endlichen Werth von s ordne man einen die Gleichung

$$s = \cos 2v\pi$$

befriedigenden Werth von v zu und nehme dann

$$G_0(s, x_1, \dots, x_r) = g_0(v, x_1, \dots, x_r),$$

so heisst $G_0(s, x_1, \dots, x_r)$ für jedes System endliche Werthe von v, x_1, \dots, x_r einen bestimmten u. ebenfalls endlichen Werth. Dann es sei v' irgend einer derjenigen Werthe von v , welche für einen gegebenen Werth s' von s der Gleichung $s' = \cos 2v'\pi$ genügen, so werden alle übrigen durch die Formel

$$\pm v' + m$$

geliefert, wo m eine ganze Zahl bedeutet;
für alle diese Werthe von v hat aber
 $g_0(v, x_1, \dots, x_r)$ denselben Werth. Nimmt man
ferner s hinlänglich nahe bei s' an und
setzt $h = 2\pi(v - v')$, so erhält man aus der
Gleichung

$$s - s' = -\sin 2v'\pi \cdot \left(h - \frac{h^3}{3!} + \dots\right) - \cos 2v'\pi \left(\frac{h^2}{2!} - \frac{h^4}{4!} + \dots\right)$$

falls $\sin 2v'\pi$ nicht gleich Null ist, einen die-
selbe befriedigenden Werth von $v - v'$, und
in dem Falle, wo $\sin 2v'\pi = 0$ ist, einen Werth
von $(v - v')^2$ in der Form einer Potenzreihe
von $s - s'$ ausgedrückt. Da nun im letzte-
ren Falle $v' = \frac{m}{2}$ und daher

$$\begin{aligned} g_0(v, x_1, \dots, x_r) &= \frac{1}{2} g\left(\frac{m}{2} + (v - v'), x_1, \dots, x_r\right) + \frac{1}{2} g\left(-\frac{m}{2} - (v - v'), x_1, \dots, x_r\right) \\ &= \frac{1}{2} g\left(\frac{m}{2} + (v - v'), x_1, \dots, x_r\right) + \frac{1}{2} g\left(\frac{m}{2} - (v - v'), x_1, \dots, x_r\right) \end{aligned}$$

ist, also in der Entwicklung von $g_0(v, x_1, \dots, x_r)$
nach Potenzen von $v - v'$ nur gerade Poten-
zen dieser GröÙe vorkommen, so läÙt sich
in beiden Fällen $g_0(s, x_1, \dots, x_r)$ als Potenze-
reihe von $s - s', x_1, \dots, x_r$ darstellen. Damit
ist bewiesen, dass $g_0(s, x_1, \dots, x_r)$ eine ganze
Funktion von s, x_1, \dots, x_r ist, welche, wenn
 $s = \cos 2v\pi$ gesetzt wird, in $g_0(v, x_1, \dots, x_r)$
übergeht.

Ebenso wird gezeigt, dass eine ganze
Funktion $g_1(s, x_1, \dots, x_r)$ existirt, welche,
wenn $s = \cos 2v\pi$ gesetzt wird, in $g_1(v, x_1, \dots, x_r)$

Hiernach hat man

$$g(v, x_1, \dots, x_n) = f_0(\cos 2v\pi, x_1, \dots, x_n) + f_1(\cos 2v\pi, x_1, \dots, x_n) \sin 2v\pi$$

Wendet man nun diesen Satz auf die Funktion $\varphi(v_1, v_2, \dots, v_n)$ an, so kann man dieselbe schreiben auf die Form

$$f_0(\cos 2v_1\pi, v_2, \dots, v_n) + f_1(\cos 2v_1\pi, v_2, \dots, v_n) \sin 2v_1\pi$$

bringen. Die Funktionen f_0, f_1 haben dann in Beziehung auf jedes Argument v_2, \dots, v_n die Periode 1, und man erhält also (für $\varepsilon = 0, 1$) :

$$f_\varepsilon(\cos 2v_1\pi, v_2, \dots, v_n) = f_{\varepsilon,0}(\cos 2v_1\pi, \cos 2v_2\pi, v_3, \dots, v_n) + f_{\varepsilon,1}(\cos 2v_1\pi, \cos 2v_2\pi, v_3, \dots, v_n) \sin 2v_2\pi$$

Dann haben die Funktionen $f_{\varepsilon,0}, f_{\varepsilon,1}$ in Beziehung auf jedes der Argumente v_3, \dots, v_n die Periode 1, man erhält also (für $\varepsilon = 0, 1, \varepsilon_1 = 0, 1$)

$$f_{\varepsilon,\varepsilon_1}(\cos 2v_1\pi, \cos 2v_2\pi, v_3, \dots, v_n) = f_{\varepsilon,\varepsilon_1,0}(\cos 2v_1\pi, \cos 2v_2\pi, \cos 2v_3\pi, v_4, \dots, v_n) + f_{\varepsilon,\varepsilon_1,1}(\cos 2v_1\pi, \cos 2v_2\pi, \cos 2v_3\pi, v_4, \dots, v_n) \sin 2v_3\pi$$

So fortsetzend kommt man zu dem Ergebniss, dass sich $\varphi(v_1, v_2, \dots, v_n)$ in der Form

$$\sum_{\varepsilon=0}^{\varepsilon=1} \sum_{\varepsilon_1=0}^{\varepsilon_1=1} \dots \sum_{\varepsilon_{n-1}=0}^{\varepsilon_{n-1}=1} f_{\varepsilon, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-1}}(\cos 2v_1\pi, \cos 2v_2\pi, \dots, \cos 2v_n\pi) \sin^{\varepsilon} 2v_1\pi \dots \sin^{\varepsilon_{n-1}} 2v_{n-1}\pi$$

Darstellen lässt, wo die Funktionen $f_{\varepsilon, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-1}}$ sämtlich ganze Functionen der Größen $\cos 2v_1\pi, \cos 2v_2\pi, \dots, \cos 2v_n\pi$ sind.

Setzt man sodann

$$\cos 2v_\alpha \pi = \frac{1}{2} e^{2v_\alpha \pi i} + \frac{1}{2} e^{-2v_\alpha \pi i}, \quad \sin 2v_\alpha \pi = \frac{1}{2i} e^{2v_\alpha \pi i} - \frac{1}{2i} e^{-2v_\alpha \pi i}, \quad (\alpha = 1..n)$$

so kann der vorstehende Ausdruck in eine beliebig konvergierende Potenzreihe der $2n$ Größen

$$e^{2v_1 \pi i}, e^{-2v_1 \pi i}, \dots, e^{2v_n \pi i}, e^{-2v_n \pi i}$$

verwandelt werden, so dass man

$$\varphi(v_1, v_2, \dots, v_n) = \sum_{\lambda_1, \mu_1, \dots, \lambda_n, \mu_n} e^{2(\lambda_1 - \mu_1)v_1 + (\lambda_2 - \mu_2)v_2 + \dots + (\lambda_n - \mu_n)v_n} \pi i$$

($\lambda_1, \mu_1, \dots, \lambda_n, \mu_n = 0.. \infty$)

erhält. Da diese Reihe gleichmäßig konvergiert, so kann man, wenn v_1, v_2, \dots, v_n irgend n bestimmte ganze Zahlen sind, diejenigen Glieder der Reihe, in denen die Differenzen

$$\lambda_1 - \mu_1, \lambda_2 - \mu_2, \dots, \lambda_n - \mu_n$$

beträglich die Werte

$$v_1, v_2, \dots, v_n$$

haben, in ein Glied zusammenfassen, wodurch sich die oben angegebene, ebenfalls gleichmäßig konvergierende Reihe für $\varphi(v_1, v_2, \dots, v_n)$ ergibt.

Drückt man sodann v_1, v_2, \dots, v_n durch die ursprünglichen Veränderlichen u_1, u_2, \dots, u_n aus, so gelangt man zu einer Entwicklung von $f(u_1, u_2, \dots, u_n)$, in welcher jedes einzelne Glied dieselbe Periodizität wie die Funktion $f(u_1, \dots, u_n)$ selbst besitzt.

Der gleichmässigen Convergenz der für $\varphi(v_1, v_2, \dots, v_n)$ gefundenen Reihe wegen ist, wenn μ_1, \dots, μ_n beliebige ganze Zahlen sind

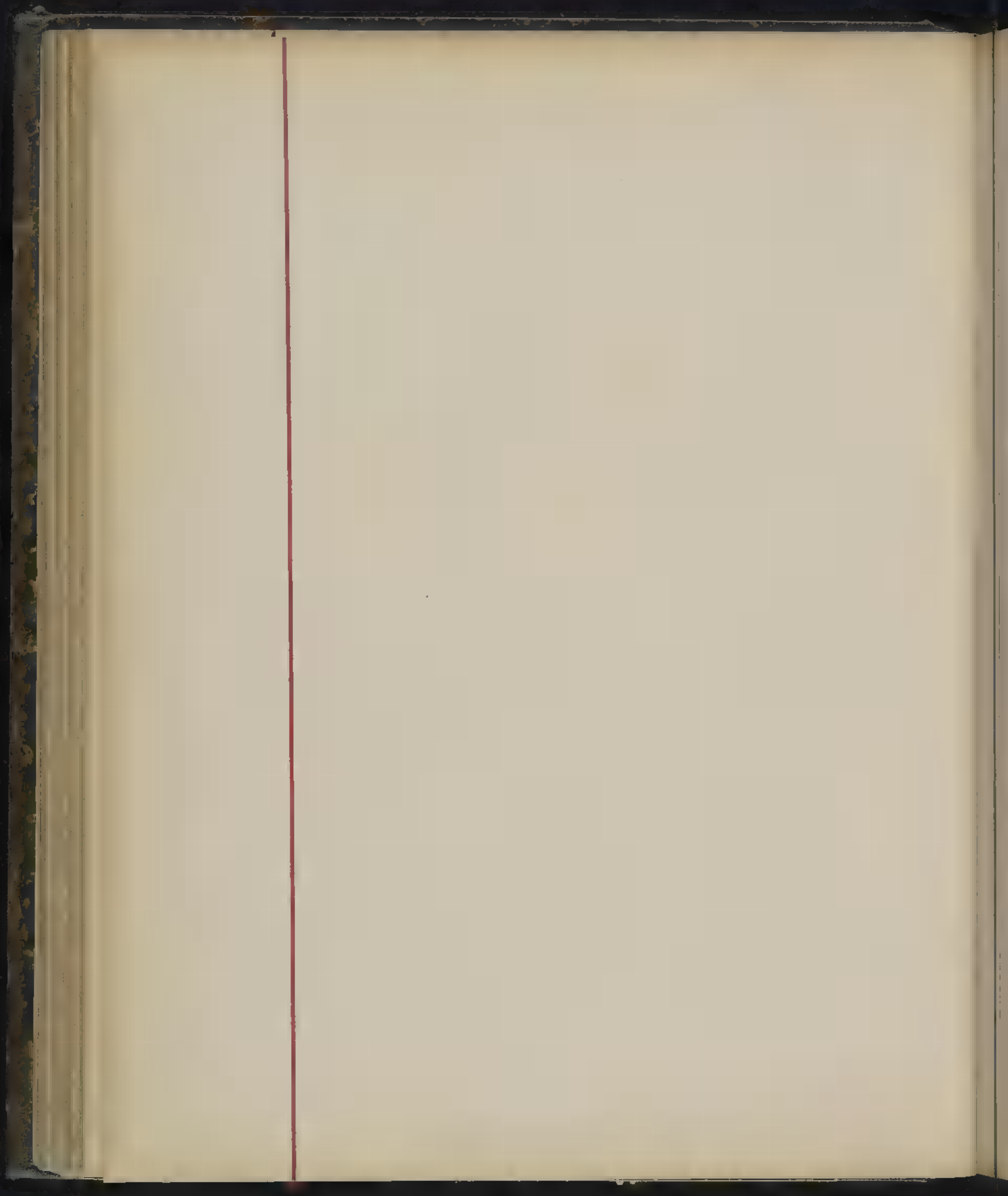
$$\int_0^1 \dots \int_0^1 \varphi(v_1, \dots, v_n) e^{-2(\mu_1 v_1 + \dots + \mu_n v_n) \pi i} dv_1 \dots dv_n \\ = \sum_v c_{v_1, \dots, v_n} \int_0^1 \dots \int_0^1 e^{2(v_1 - \mu_1) v_1 + \dots + (v_n - \mu_n) v_n} \pi i dv_1 \dots dv_n$$

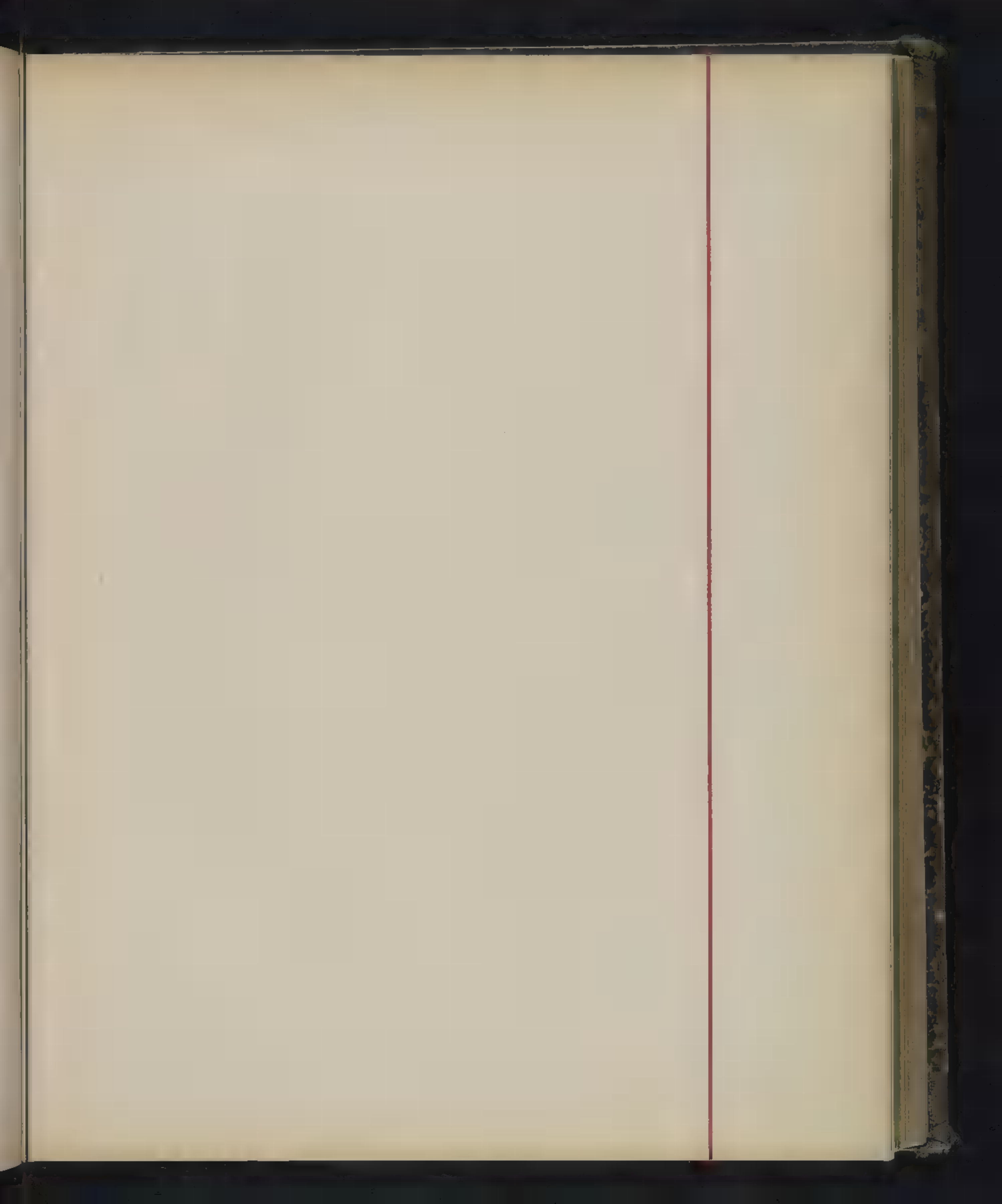
woraus in Uebereinstimmung mit dem oben Angegebenen

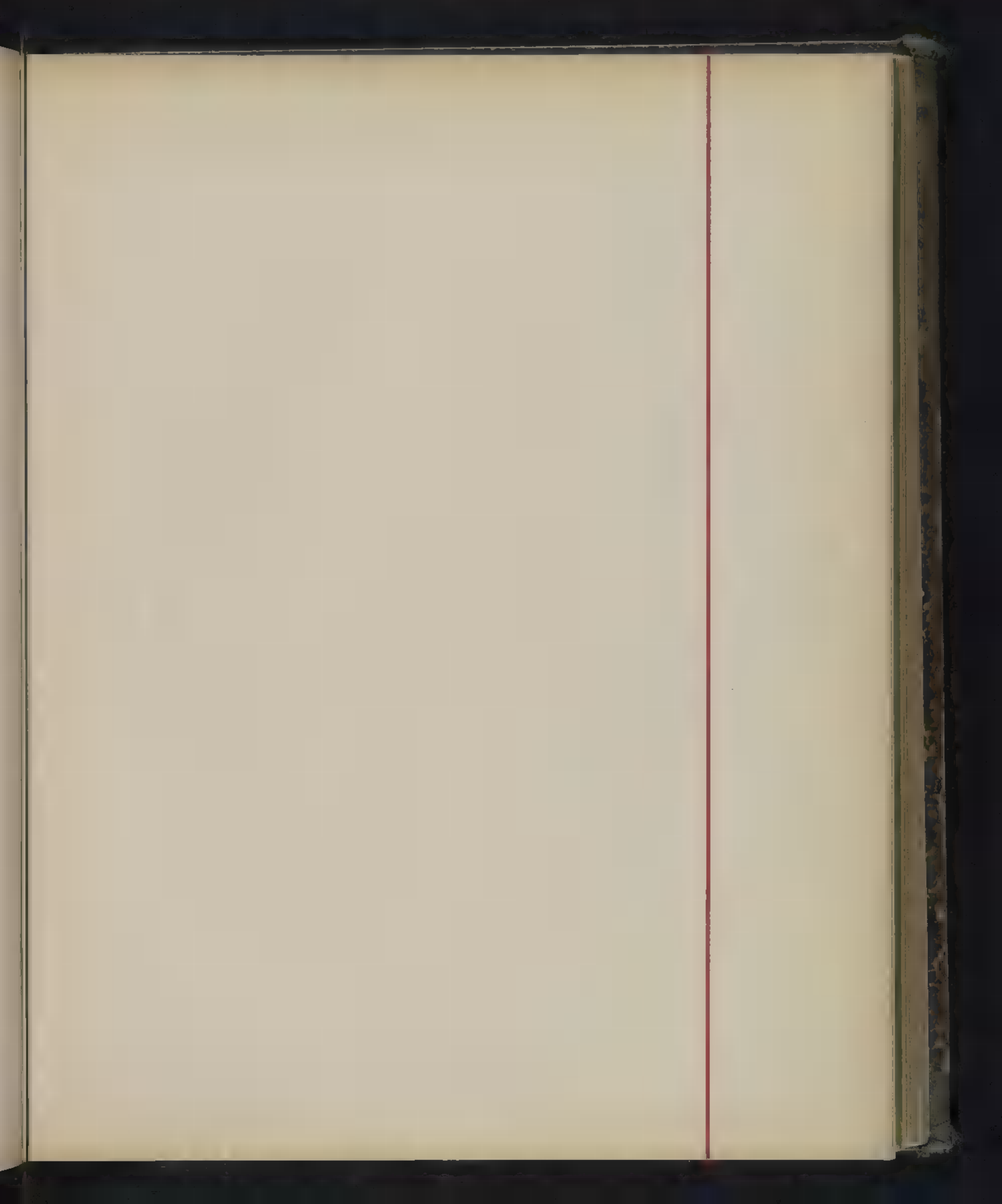
$$c_{\mu_1, \dots, \mu_n} = \int_0^1 \dots \int_0^1 \varphi(v_1, \dots, v_n) e^{-2(\mu_1 v_1 + \dots + \mu_n v_n) \pi i} dv_1 \dots dv_n$$

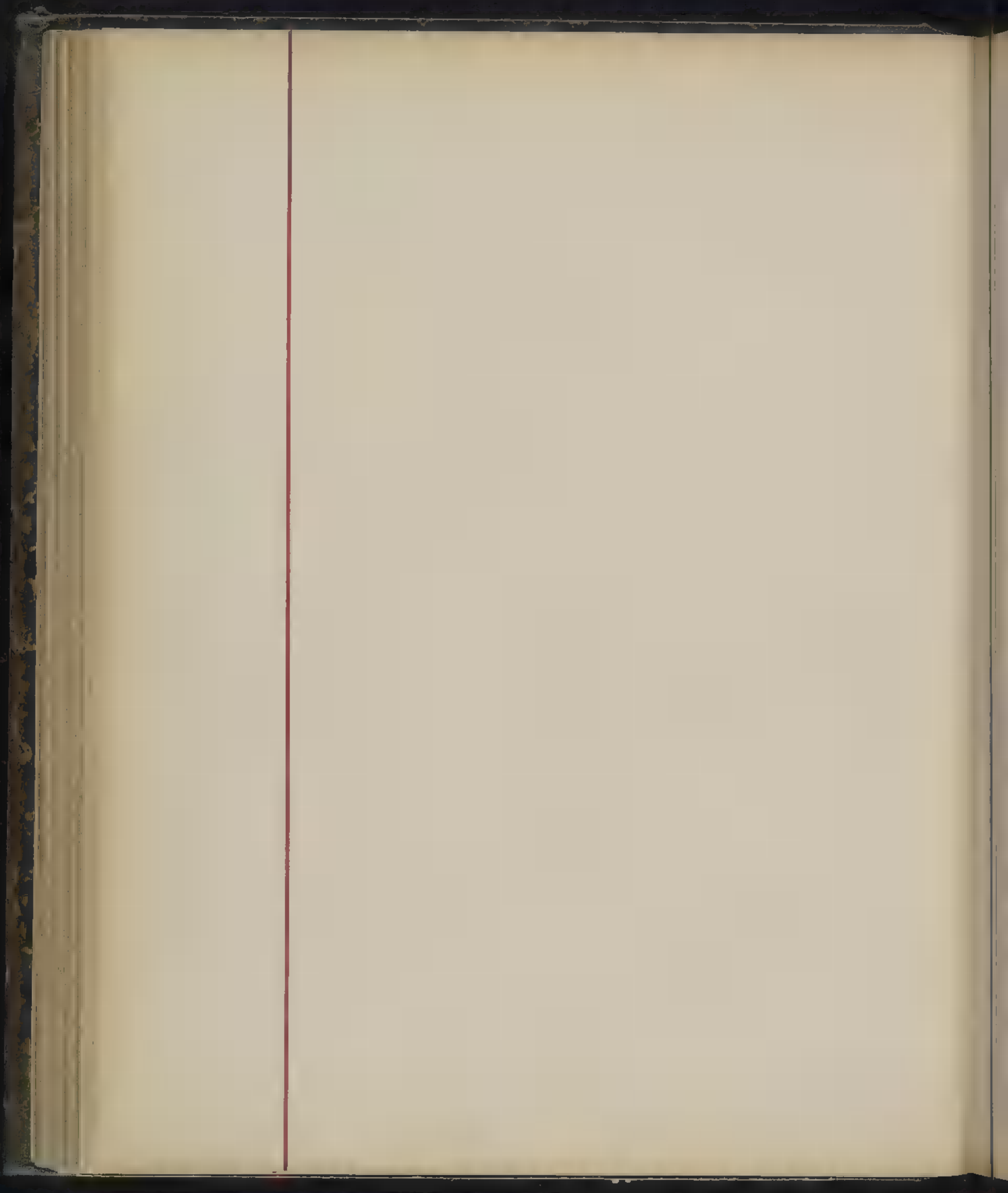
folgt.

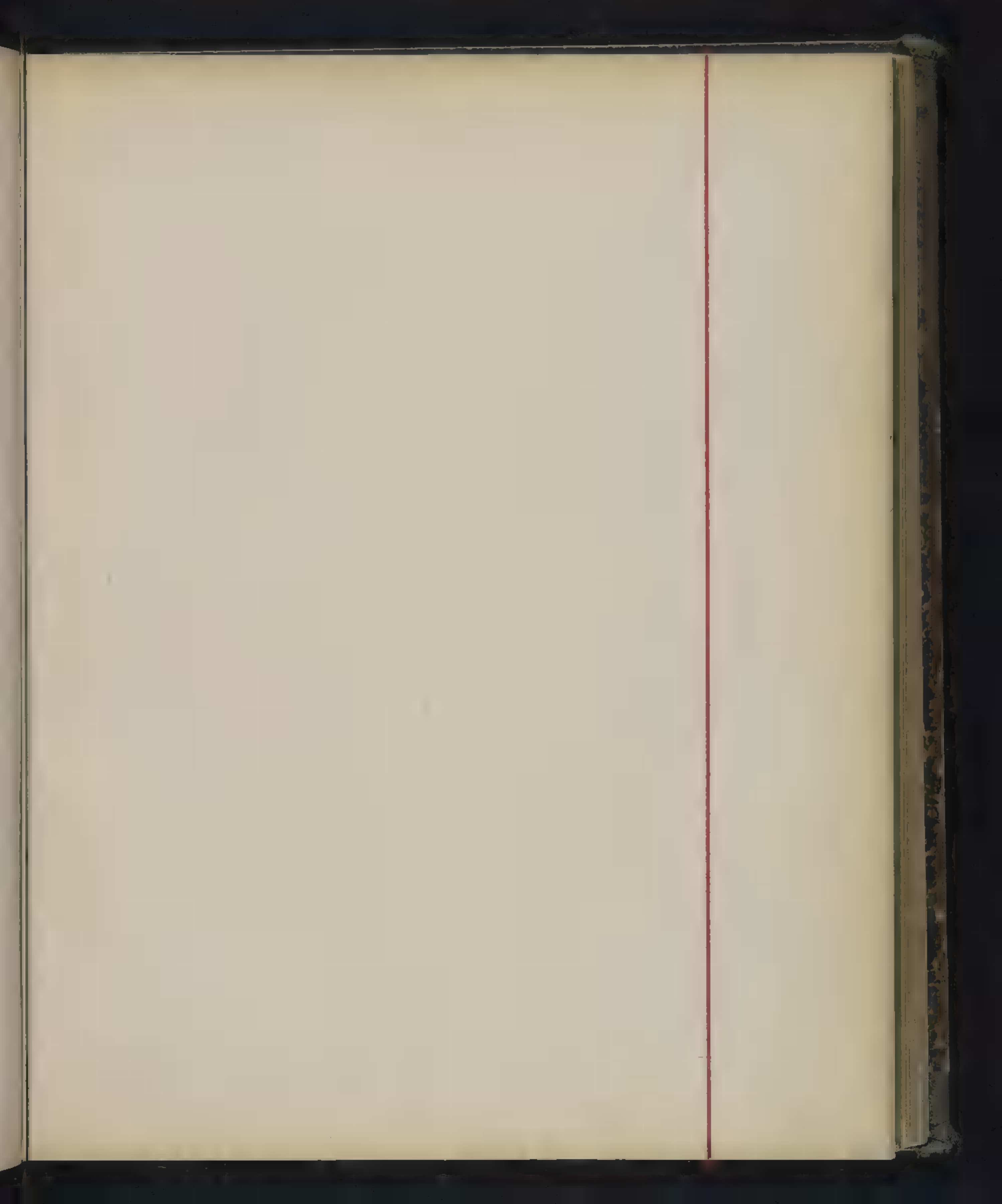
in
ich
ind
do
ben
do

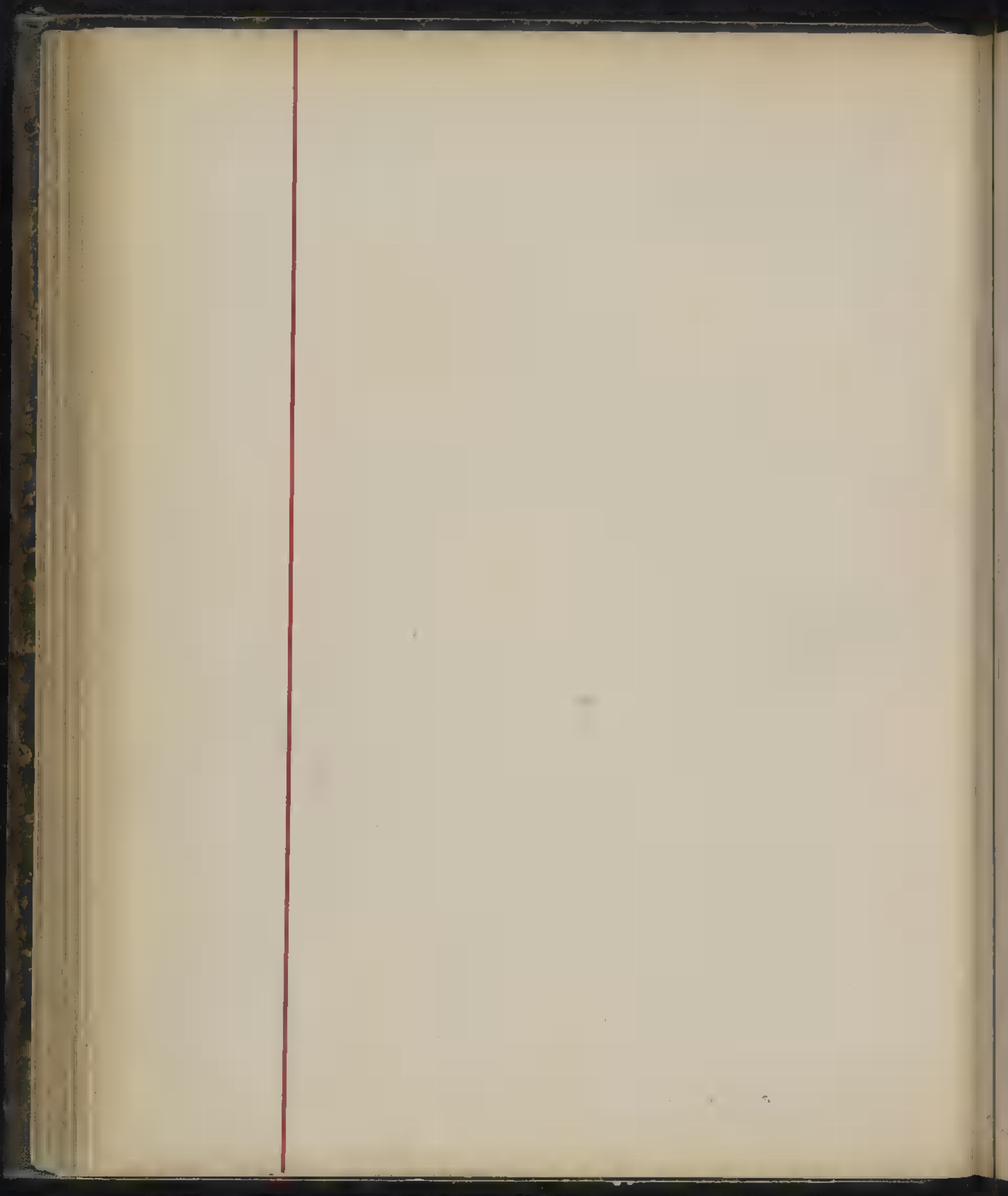












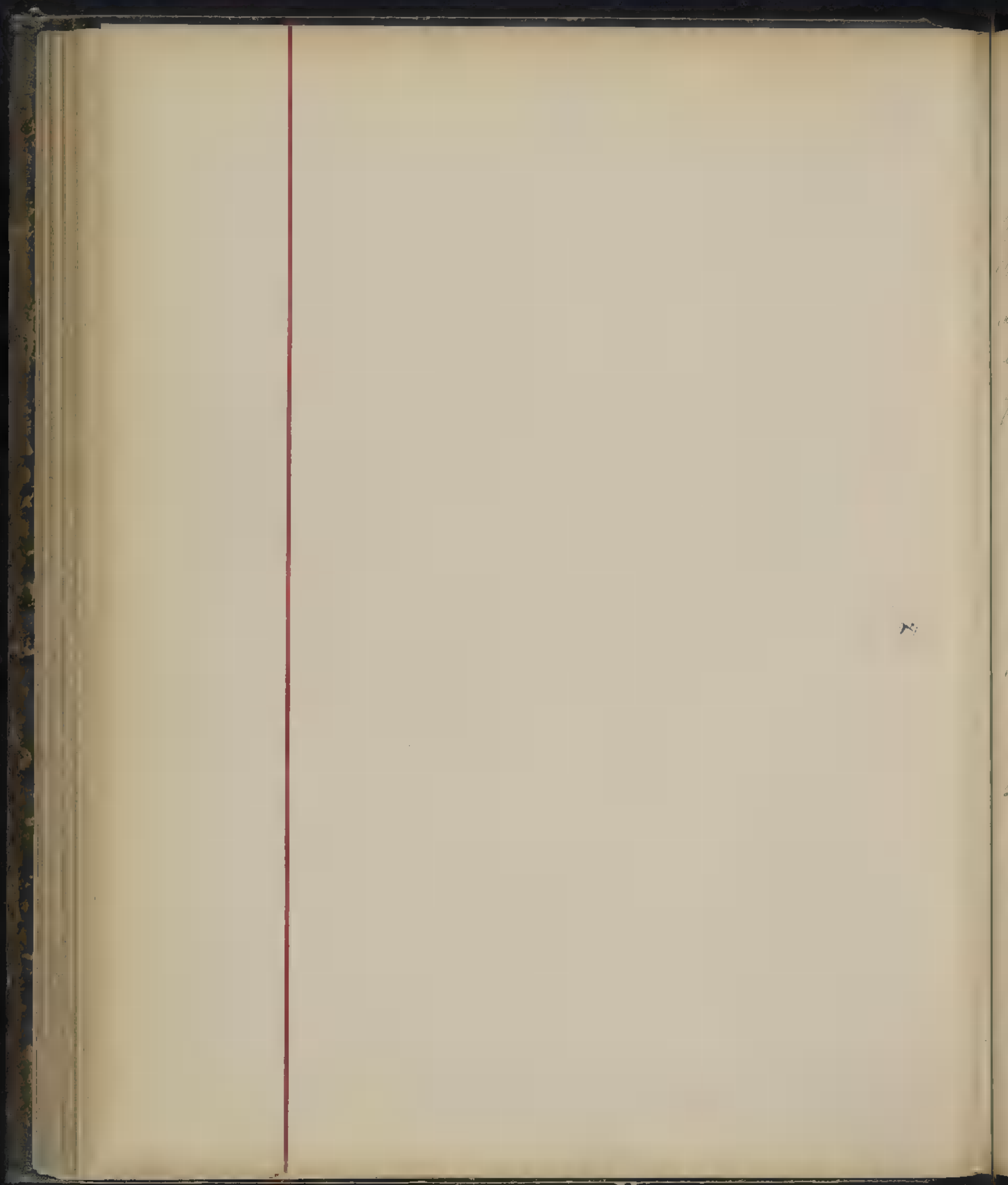
Handwritten text, possibly a title or address, in cursive script.

Handwritten text, possibly a name or address, in cursive script.

Handwritten text, possibly a name or address, in cursive script.

Handwritten text, possibly a name or address, in cursive script.

Handwritten text, possibly a name or address, in cursive script.



Eindeutige Funktionen.

26. April. '81

Einführung der Expon. Funct. in die Analysis.

Wie

Wie dies auch geschieht kommt man immer auf die Eigenschaft der beständ. Converg. und die Existenz einer singul. Stelle. Wir gehen nun aus von der Eigenschaft dass wenn die Argumentwerte in arithmetische Reihe steigen, die Funct.werte in einer geometrischen Reihe sich verhalten.

Es sei die Funct

$$f(u) = x$$

Man nehme 3 Werten des Arg. zu in arith. Reihe

$$u_1 = u$$

$$u_2 = u + a$$

$$u_3 = u + 2a$$

20 Ist dann $f(u_1) = x$

$$f(u_2) = f(u + a) = f(u) \cdot f(a)$$

$$f(u_3) = f(u + 2a) = f(u) \cdot f(a) \cdot f(a) = f(u) \cdot f(a)^2$$

$$f(2u) = f(u)^2$$

$$f(u) \cdot f(v) = f(u+v) = f\left(\frac{u+v}{2}\right)^2$$

$$f(u) = \sqrt{f(2u)} = (f(2u))^{1/2}$$

Charakterist. Eigenschaft
Exponent. Funct.
von der die
Argumente abhängen

$$F(u+h) \cdot F(u) = F^2(u+h)$$

$$F(u) \cdot F(u+h) = F^2(u+h)$$

$$\frac{F(u+h)}{F(u)} = \frac{F(u+h)}{F(u)}$$

$$\frac{F(u+h)}{F(u)} - 1 = \frac{F(u+h)}{F(u)} - 1$$

$$\frac{F(u+h) - F(u)}{F(u)} = \frac{F(u+h) - F(u)}{F(u)}$$

d.h. der Ausdruck links ist von u unabhängig
und

$$\frac{F(u+h) - F(u)}{F(u)} = \text{const} = c = \frac{F'(u)}{F(u)}$$

$$\frac{F'(u)}{F(u)} = \frac{F'(v)}{F(v)} = \text{const.} = c$$

$$F'(u) = c \cdot F(u)$$

und die Ableitung ist der Function selbst proportional.

Man nehme nun an die $F(u)$ sei eine analytische
Function und entwickelbar in der Nähe eines
Punktes a in eine Potenzreihe

$$F(u) = C_0 + C_1(u-a) + C_2(u-a)^2 + \dots$$

Denn Ableitung ist

$$F'(u) = C_1 + 2C_2(u-a) + 3C_3(u-a)^2 + \dots$$

$$C \cdot C_0 = C_1; \quad C \cdot C_1 = 2^1 C_2; \quad C \cdot C_2 = 3^2 C_3; \quad \dots; \quad C \cdot C_{n-1} = n C_n$$

$$C_n = \frac{C \cdot C_{n-1}}{n}$$

$$C_1 = C \cdot C_0; \quad C_2 = \frac{C \cdot C_1}{2} = \frac{C \cdot C \cdot C_0}{2};$$

$$C_3 = \frac{C \cdot C_2}{3} = \frac{C \cdot C \cdot C \cdot C_0}{2 \cdot 3};$$

$$C_4 = \frac{C \cdot C_3}{4} = \frac{C^4 \cdot C_0}{4!}; \quad C_n = \frac{C^n C_0}{n!}$$

Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{C^n C_0}{n!} x^n$ ist die Entwicklung der Funktion $E(Cx)$ nach der Potenzreihe von e^x .
 Da C eine beliebige reelle oder komplexe Zahl sein kann, so ist die dargestellte Reihe für jeden Wert von C eine Potenzreihe der Funktion $E(Cx)$.

$$E(Cx) = 1 + Cx + \frac{C^2 x^2}{2!} + \frac{C^3 x^3}{3!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{C^n x^n}{n!}$$

$$E(Cx) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{C^n x^n}{n!} = E(Cx)$$

Denselben Charakter besitzen auch
 $E(Cx)$ und $A \cdot E(Cx)$ (und $E(Cx)$)

Man setze $\xi = E(Cx)$
 so ist auch $\varphi(x) = F(\xi) = F(E(Cx))$

eine Potenzreihe der betrachteten Art.

Sind 3 Wurzeln von φ , $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ in einer arithmetischen Reihe angeordnet, so besteht die

$$\xi_1 \cdot \xi_2 \cdot \xi_3^2 = 1$$

Oh wenn in $\mathbb{C}(u)$ 3 Wörtern von u in einer Reihe angenommen werden, so besteht die

$$\text{H.} \quad \mathbb{C}(u_1) \cdot \mathbb{C}(u_2) - \mathbb{C}(u_3)^2 = 0$$

was auch besteht wenn man irgend eine rationale und algebra. Funktion von $\mathbb{C}(u)$ nimmt.

$F(\mathbb{C}(u)) \cdot F(\mathbb{C}(u)) -$
mindestens besteht

$$F(u, F(\mathbb{C}(u))) = 0$$

Um diesen Satz zu beweisen, setzen wir

$$f(x) = E(x) = x$$

$$E(2x) = x^2$$

$$E(nx) = x^n \text{ etc.}$$

lassen sich alle anderen Eigenschaften ableiten.

$$E(u) \cdot E(v) = E\left(\frac{u+v}{2}\right)^2$$

Ist nun $u+v = u'+v'$

$$\text{so ist } E(u) \cdot E(v) = E(u') \cdot E(v')$$

Setzt man $v' = 0$, und, da $E(0) = 1$

$$E(u) \cdot E(v) = E(u') = E(u+v)$$

$$\text{d.h. } E(u+v) = E(u) \cdot E(v)$$

$$\text{Ferner } E(u+v+w) = E(u) \cdot E(v) \cdot E(w); \text{ u.s.w.}$$

} Addit. Theorem.

Negative Werte. Setzt $v = -u$

$$E(0) = 1 = E(u) \cdot E(-u)$$

$$E(-u) = \frac{1}{E(u)}$$

$$E(u-v) = E(u) \cdot \frac{1}{E(v)}$$

$$E(nu) = E^n(u)$$

$$E(-nu) = E^{-n}(u) = \frac{1}{E(nu)}$$

$$E\left(\frac{v}{u}\right) = E^n\left(\frac{1}{u}\right) =$$

Weglassen für + und neg. ganz u. Bruchwerte

$$E(x_1 + x_2 + \dots + x_n) = E^{x_1}(u) \cdot E^{x_2}(u) \cdot \dots \cdot E^{x_n}(u).$$

" "

d.h. der Ausdruck links "lässt sich rational aus den einzelnen Theilen zusammensetzen."

Man setze $x = e^u$
 so mussen wir $e^u = x$

$$e^{-u} = e^v = \frac{1}{e^u}$$

$$e^{\frac{v}{u}} = e^{\frac{v}{u}} = \frac{v}{u}$$

und somit ist $e^u = x$

erklärt für alle pos. neg, und brach. Werte des Arg. u.

In

$$x = e^u$$

nennt man das System der Argumente u ein Gebilde im Gebiete des x .

Umkehrung der Funkt.

Setzt man x als die unabh. Var. an
 so heisst $u = \log_e x$

Es geben. Werte des u entspr. nur ein W. des x .
 Wir wollen untersuchen ob u auch eine 1. Funkt.
 des x ist.

Es ist $x = e^u = 1 + u + \frac{u^2}{2!} + \dots$

$$x^{-1} = e^{-u} = 1 - u + \frac{u^2}{2!} - \frac{u^3}{3!} + \dots$$

Für compl. Werte der $u = t + si$

$$x = e^t \cdot e^{si}$$

$$e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2!} + \dots =$$

$$e^{si} = 1 + si - \frac{s^2}{2!} + \frac{s^3 i}{3!} - \dots = p + qi$$

$$e^{-si} = 1 - si - \frac{s^2}{2!} + \frac{s^3 i}{3!} - \dots = p - qi$$

$$p^2 + q^2 = 1 = (\text{Abol. Betr.})^2 \text{ von } e^{si}$$

Wir zerlegen die Funkt. in 2 Teile

$$x = e^t \cdot e^{si} = r(\alpha + \beta i)$$

$$\underline{e^t \cdot e^{-si} = r(\alpha - \beta i)}$$

$$u = t + si$$

Multipl.

$$e^{2t} = r^2$$

$$e^t = r$$

sonst muss

$$e^{si} = \alpha + \beta i$$

Da s und t beide reell sind so ist

$$t = \text{reel log}(r)$$

Nun si gleichfalls zu bestim. Es gibt einen
besond. Werth von s für welche $e^{si} = 1$; nennt
man dies 2π so ist

$$e^{2\pi i} = 1$$

(Wahr denn

$$e^{si} = 1 + si - s^2 - s^3 i + s^4 + s^5 i - \dots$$

$$e^{-si} = 1 - si - s^2 + s^3 i + s^4 - s^5 i - \dots$$

($e^{si} = \cos s + i \sin s$; da 1 result. so muss $\sin s = 0$ ist, $s = 2\pi$)

$$u = t + si + 2\pi i$$

wird bestimmt ist der Minimalwerth, welcher

$$e^{si} = \alpha + \beta i$$

genügt.

Beweis der Periodicität dieser Funkt. aus
besten mittelst der Sin und Cos.

$$e^{si} = \cos s + i \sin s$$

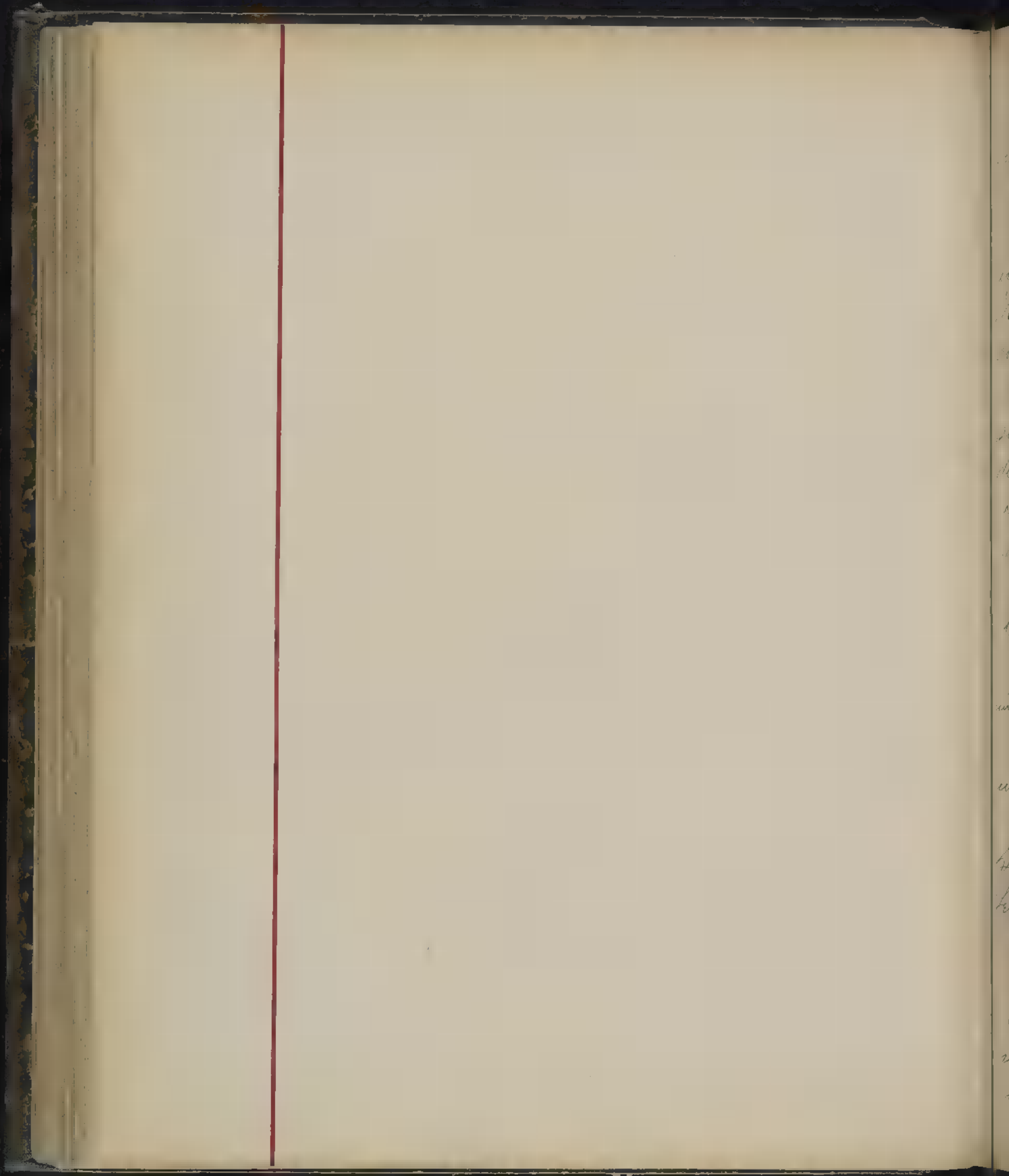
$$\underline{e^{-si} = \cos s - i \sin s}$$

multipl.

$$1 = \cos^2 s + \sin^2 s$$

$$e^{si+2\pi i} = e^{(s+2\pi)i} = \cos(s+2\pi) + i \sin(s+2\pi)$$

$$\underline{e^{si+2\pi i} = \cos s + i \sin s = e^{si}}$$



1. Voraussetzung: φ ist eine Funktion, welche ein Additionstheorem besitzt.

Wir nehmen an, das φ sei eine analytische, d.h. darstellbar für ein der Nähe irgend eines Wertes des Arg. durch eine Pot. Reihe

$$\varphi(u) = c_0 + c_1(u-a) + c_2(u-a)^2 + \dots$$

so lässt sich diese auf eine Form reduzieren die entwickelbar ist in der Nähe des Opt. indem man setzt $u' = u - a$, die hier dann die Form

$$\varphi(u) = c_0 + c_1 u' + c_2 u'^2 + \dots$$

So lange $u+v = u'+v'$ können wir bilden

$$G_1(\varphi u, \varphi v, \varphi(\frac{u+v}{2})) = 0$$

und

$$G_1(\varphi u', \varphi v', \varphi(\frac{u'+v'}{2})) = 0$$

und, nach Elim. von $\varphi \frac{u+v}{2} = \varphi \frac{u'+v'}{2}$ zwischen den

$$G_1(\varphi u, \varphi v, \varphi u', \varphi v') = 0$$

Setzt man jetzt $u'=0$, d.h. $u+v=v'$, so geht Letzteres über in

$$G_2(\varphi u, \varphi v, \varphi(u+v), \varphi(0)) = 0 = \text{Add. Theor.}$$

Um diese G_2 in eine Pot. R. zu entwick. setzen wir $\varphi u = x$ $\varphi v = y$ $\varphi(u+v) = z$ und ordne nach Potenzen von z , so werden die Coeff.

Punkt" sein. f. von x, y, \dots in Form

$$C \quad Z^n + F_1(xy) Z^{n-1} + F_2(xy) Z^{n-2} + \dots + F_n(xy) = 0 = F_n$$

Wir bestim. zunächst eine algebr. Gl. zw. φu & $\varphi' u$

$$\frac{\partial F}{\partial x} \cdot \frac{dx}{du} + \frac{\partial F}{\partial z} \cdot \frac{dz}{du} = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dv} + \frac{\partial F}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dv} = 0 \quad \begin{array}{l} z = u+v \\ \frac{\partial}{\partial u} = \frac{\partial}{\partial v} \end{array}$$

$$A, \quad \frac{\partial F}{\partial x} \cdot \frac{dx}{du} - \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dv} = 0$$

$$B, \quad \left(\frac{\partial F}{\partial x} \cdot \frac{dx}{du} - \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dv} \right) Z^{n-1} + \dots + \left(\frac{\partial F_n}{\partial x} \cdot \frac{dx}{du} - \frac{\partial F_n}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dv} \right) = 0$$

Zw B & C elim. man Z , so kommt heraus

$$G(x, y, \frac{dx}{du}, \frac{dy}{dv}) = 0$$

oder indem v als const. angesehen $v=0$

$$H(x, y, \frac{dx}{du}) = G(\varphi u, \varphi v, \varphi' u) = 0$$

Für $v=0$ werden nicht alle Glieder verschwinden
Denn wir bringen die Gl. in die Form,

$$G_0 + G_1(xy) \cdot \frac{dy}{dv} + \dots$$

Man ordne nämlich nach $\frac{dy}{dv}$ vgl. Verhältnisse
Denn jedes Glied der Entw. für $v=0$, so
tritt v oder eine Potenz von v als Factor
in jedem Glied auf, und kann mit v
dividiert werden. Die Entw. hat dann
die Form $G_0(x, y, \frac{dx}{du}) + G_1(x, y, \frac{dx}{du}) \frac{dy}{dv} + G_2(x, y, \frac{dx}{du}) \frac{dy^2}{dv^2} + \dots$

$$f(u) = f(0) + f'(0)u + \frac{f''(0)}{2!}u^2 + \dots$$

Für $v \neq 0$ wird jedes Glied. coeff.

$$f_u(\varphi_u \varphi_v \varphi'_v) = \text{etwa } \alpha$$

und α muss auch φ_v als Factor enthalten

$$\text{d.h. so konst. } f_u(\varphi_u \varphi'_u) = \frac{\alpha}{\varphi_v} = \beta = \text{const. i.d. } \varphi_v$$

Oder ist $\varphi'_v = 0$ für $v=0$ so ist $\varphi(v) = \text{const. } (v=0)$

$\varphi'_0 = 0$ so ist $\varphi(0) = \text{const.}$

und wir haben aus der Voraussetzung

$$G(\varphi_u \varphi_v \varphi(\frac{u+v}{2})) = 0$$

$$G(\varphi_u \varphi'_v \varphi(\frac{u+v}{2})) = 0$$

das $\varphi(\frac{u+v}{2}) = \varphi(\frac{u+v}{2})$ zu elimin. und erhält

$$G_2(\varphi_u \varphi'_u \varphi(u+v)) = 0$$

Wir untersuchen diejenigen F_i für welche
 wenn $gaw.$ den Argum. werden eine algebra.
~~Relation~~ Gleichung besteht, dass dann auch zu
 den F_i werden ebenfalls eine algebr. Gf. besteht.

Es seien auch analyt. F_i mit dem wir
 handeln. Eine solche sei $\varphi(u)$, es ist
 φ für irgend einen Werte $u=a$ entwickelt
 in der Nähe von a in einer Pot.R. die
 nach Pot. von $u-a$ fortschreitet.

$$\varphi(u) = A_0 + A_1(u-a) + A_2(u-a)^2 + \dots$$

Zw. 3 Arg. werten betrachte die Root $u_2 = \frac{u_1 + u_3}{2}$

$$\varphi(u_1) - A_0 = A_1(u_1-a) + A_2(u_1-a)^2 + \dots$$

$$\varphi(u_2) - A_0 = A_1(u_2-a) + A_2(u_2-a)^2 + \dots$$

$$\varphi(u_3) - A_0 = A_1(u_3-a) + A_2(u_3-a)^2 + \dots$$

Wenn u_1, u_3 im Conv. Kreis liegen so liegt immer
 auch u_2 darin. Durch Transp. in A_0

$$1 \quad u_1 - a = \frac{1}{A_1} (A_0 - \varphi(u_1)) + \frac{A_2}{A_1} (u_1-a)^2 + \frac{A_3}{A_1} (u_1-a)^3 + \dots$$

$$2 \quad u_2 - a = \frac{1}{A_1} (A_0 - \varphi(u_2)) + \frac{A_2}{A_1} (u_2-a)^2 + \dots$$

$$3 \quad u_3 - a = \frac{1}{A_1} (A_0 - \varphi(u_3)) + \frac{A_2}{A_1} (u_3-a)^2 + \dots$$

Aus 1 & 3 ist Add

$$u_1 + u_3 - 2a = 2(u_2 - a) \quad u_2 - a = \frac{1}{A_1} \left(-\frac{\varphi(u_1) + \varphi(u_3)}{2} + A_0 \right) + \dots$$

Wir haben dann

$$u_2 - a = \frac{1}{A_1} (A_0 - \varphi u_2) + \dots$$

$$= u_2 - a = \frac{1}{A_1} \left(A_0 - \frac{\varphi u_1 + \varphi u_3}{2} \right) + \dots$$

oraus eine Gl. zw. φu_2 & $\frac{\varphi u_1 + \varphi u_3}{2}$
 oder $G(\varphi u_1, \varphi u_2, \varphi u_3) = 0$ Q.E.D.

Wenn Sh. zw. den Arg. werten einen belieb.
 analys. Fr. die Gl. besteht $u_2 = \frac{u_1 + u_3}{2}$
 so besteht eine Gl. zw. $\varphi u_1, \varphi u_2, \varphi u_3$.

Die Arg. werte sind 2 Add. & Subtr. verbunden
 worden, und die resultierende Gl. $G(\varphi u_1, \varphi u_2, \varphi u_3)$
 ist unbekannter Natur, und gilt für ein
 einziges Li. Element.

Wir reduc. die Reihe für $\varphi(u)$ auf die
 Null Stelle indem wir es einsetzen für $u-a$

Solange denn $\varphi(u)$
 $u_2 = \frac{u_1 + u_3}{2}$ besteht $G(\varphi u_1, \varphi u_2, \varphi u_3) = 0$
 wo u_1, u_3 beliebig sind. solange $v_1' + v_3' = u_1 + u_3$ ist
 auch $v_2 = \frac{v_1' + v_3'}{2}$ und $G(\varphi v_1, \varphi v_2, \varphi v_3') = 0$

Aus diesen 2 Gl. können wir u_2 elim. und
 es
 $G(\varphi u_1, \varphi v_3', \varphi u_2, \varphi v_3') = 0$

Setzt man nun $v_3' = 0$; $v_1' = u_1 + u_3$ so
 $G(\varphi u_1, \varphi u_3, \varphi(u_1 + u_3)) = 0$

$$G(u, u, u) = 0.$$
$$7. \quad Q(x, z) = 0$$

$$3 \quad \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial v} + \frac{\partial g}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dv} = 0$$

$$4 \quad \frac{\partial g}{\partial x} \frac{dx}{du} - \frac{\partial g}{\partial y} \frac{dy}{du} = 0$$

$$C\left(x, y, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right) = 0$$

oder $G(q_u, q_v, p_u, p_v) = 0$

$$Q(u+v) = Z = \int \left(x, y, \frac{dx}{du}, \frac{dy}{dv} \right)$$

$$\Phi(u+v) = F(u \wedge v, u' \wedge v')$$

Wir nehmen den Fall wo $F = \text{Rat.}$ und
vertr. mit dem allgem. Fall. Dieses spec. Fall
 $R(1)$ gibt die ident. F. u. und die Anzahl
der wrentl. zing. Stellen ist eine die im ∞ liegt.

Neben gilt $f(u) = R(u, u, u, u)$

30/4/61

Convergiert die Pot R. dann F_0 für $|u| < r$
und auch für $|v| < r$
so konv. sie auch für $|u+v| = |u| < 2r$

Setze man $u = v$

$$\varphi(2u) = R_1(\varphi \frac{u}{2} \varphi' \frac{u}{2})$$

welches definiert ist für $|u| < 2r$

Durch Wiederh. dieses Verfahrens, kann die F_0
beliebig fortgesetzt werden.

Dies nicht ohne Bedenken da φ eine Pot
für sein soll und sich darstell. lässt d. Aut

$$\varphi(u) = \frac{G(\varphi u \varphi v \varphi u \varphi v)}{G_0}$$

Es kann vorkommen dass für $u=v$ $\frac{G=0}{G_0=0}$
im unbest. Fall der wahre Wert zu ermitteln
ist. Man setze statt u $\frac{u}{2} + h$ statt v $\frac{v}{2} + h$

$$\varphi(u) \cdot G_0(\varphi(\frac{u}{2} + h); \varphi'(\frac{u}{2} - h), \varphi'(\frac{u}{2} + h), \varphi'(\frac{u}{2} - h)) = G(\varphi(\frac{u}{2} + h) \varphi(\frac{v}{2} + h))$$

Das Anfangsglied der Entwickl. in Pot R. nach h
muss auf beiden Seiten dasselbe Potenz m. h
enthalten $h^n (\frac{F_u}{2} \dots) (u) = h^n (\frac{F_u}{2} \dots)$

$$\varphi u = \frac{F(\frac{u}{2})}{G(\frac{u}{2})} \quad \text{oder}$$

$$\varphi u = R_1(\dots) \quad \text{G.E.D.}$$

Das Verfahren lässt eine betr. Wahl zu.

Haben $\frac{F_v}{G_v}$ und $\frac{F_u}{G_u}$ einen gemeinsamen Nenner.
und nehmen sie denselben W. für $u < v$ so sind
sie ident. und

$$F G_v - F_v G_u = 0 \quad u < v.$$

Denn die F und G Werte gemein. folgt in
der Annahme, der letzter F sind mit G
ident.

In jedem Fall wird $Q(u) = \frac{F(u)}{G(u)}$ eine
ganze F von F_0^u und deren Ableitungen in
endl. Anzahl. Die höheren Ableit. lassen
sich mit F und G ausdrücken, z.B.

$$Q'(u) = R_1(Q^u, Q^u)$$

Dies kann immer mindestens als Quot. 2er
Potenzreihen dargestellt werden

$Q = \frac{f_1}{g_1}$
und belieb. fortgesetzt werden. In der PotReihe
kommen neg. Pot vor so hat man 3 Fälle
in

$$\frac{u-v}{(u-a)} \frac{A_0 + A_1(u-a) + \dots}{B_0 + B_1(u-a) + \dots}$$

gemachdem $\mu > v$, Q hat wahren Werte 0 für $u=a$
 $\mu = v$ $\dots \dots \dots$ 1 oder $\frac{A_0}{B_0}$
 $\mu < v$ $\dots \dots \dots$ ∞

11. *S. 11*

Ist nun $u = \frac{f}{g}$
 der Werth $\phi(u) = \frac{f}{g}$
 annehmen, so ist dies mit mögl. dann nicht
 $\frac{f}{g} = \frac{f}{g}$

Wir lassen u in $u+h$ übergehen; es ist

$$\frac{f(u+h)}{g(u+h)} = \frac{f_0 + f_1 h + \dots}{g_0 + g_1 h + \dots} = h^2 \cdot P(h) \\
 = (u-a)^2 P(u-a)$$

Damit die neue Fk. mit der ~~ersten~~ ~~ersten~~ ~~ersten~~
 erweitert werden könne, muss sie mit der ersten
 übereinstimmen.

$$\phi(u+v) = \frac{G_1(\phi u \phi v \phi u \phi v)}{G_0}$$

$$G_0 \cdot \phi(u+v) = G_1 = 0, \quad \text{solange } |u| < r.$$

Es gibt also eine Fk. welche für kleine
 Werthe der Arg. mit $\phi(u)$ übereinstimmt
 und welche darstellbar ist als der Quot.
 der Pot R. die für $|u| < r$ converg.

Zu beweisen das eine solche Fk. möglich
 ist, d. h. dass alle Elem. aus einem
 entspringen.

1. Für alle wähl. u hat sie einen bestimmt
 Werth und keine negat. Pot enthalten.

100

101

102

103

(2) Satz $\phi(u) = u - a, \quad \psi(u) = \frac{1}{\phi(u)}$ so nehmen wir

$$\frac{1}{\phi(u)} = \psi(u) = (u-a)^{+2} \phi(u)$$

die endl. Heft für alle endl. Werte von a ,
Satz.

Wenn a eine ganz belieb. Werte des
Arg. ist so kann man in seiner Nähe
eine Unst. ansetzen wo keine sing. Werte
existieren. Denn es kann die Unst. so
klein angenommen werden, dass keine
andere Ausnahmest. als a selber da ist
und dann nehmen wir die reziproke.
zu. ϕ .

Satz

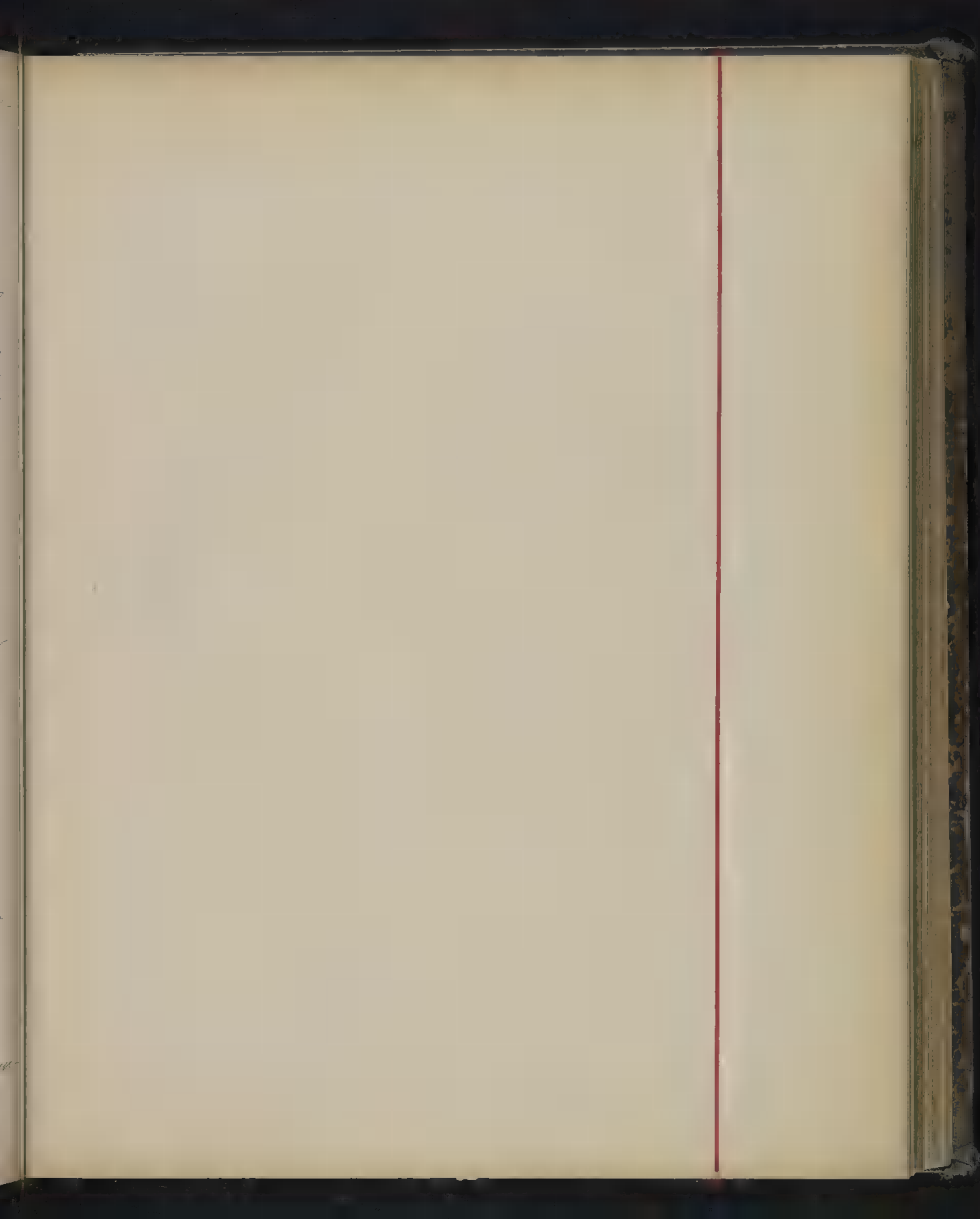
In endl. Bereich hat die ϕ nur
eine endl. Anzahl von sing. Stellen,
Denn wären es viele da, so würde ein
Pt sich finden lassen, wo die sing. Stellen
in jeder Nähe desselben in ∞ Anzahl
vorhanden wäre, die zu den definierten
gehören.

Hat $\phi = \frac{f}{g}$ mehrere mehrfache sing. Stellen
so mult. man mit

$$(u-a_1)^{r_1} (u-a_2)^{r_2} \dots (u-a_n)^{r_n} = \psi(u)$$

und das Prod. wird nie ∞ im Endl.

Der const. Red. r muss mit n übereinstimmen.



3. Mai

in für einen festst. Coefficienten λ so ist zu beweisen dass es im Unend. Werthe von u gibt für welche $F_u = \infty$
Für $u > R$ soll $F_u > G$.

Bew. Unter den Coeff. der Reihe, wähle man einen der ≤ 0 ist $= |C_v| > 1$
Für $|u| > \rho$ soll Maxim. $f(u) = g$
Es ist $C_v \equiv g \rho^v$ $|u| = \rho$

daraus $g \equiv |C_v| \rho^v$
und da ρ beliebig gross angenommen werden kann ist g beliebig gross G.E.D.
Diesen Satz annehmen.

(Das v te Glied sei $+ C_v u^v$, es muss das Max der F_u grösser sein als dies Glied $g > C_v u^v$

$$\begin{aligned} \frac{g}{C_v} &> u^v \\ g \rho^v &> |C_v| \\ g &> |C_v| \rho^v. \end{aligned}$$

Ist dann

$$F(u) = (u-a)^2 P(u-a)$$

$$= A(u-a)^2 + A_1(u-a)^3 + \dots + A_n(u-a)^{n+1} + P(u-a)$$

oder

$$F(u) = R(u) + P(u-a)$$

so ist

$$F(u) - R(u) = P(u-a)$$

eine $F(u)$ die nicht Null wird im Endlichen

und falls sie unendlich wird so wird

$\frac{1}{F-R}$ nicht unendlich im Endlichen

Ebenso wie e^u ist auch $e^{G(u)}$ niemals = Null im Endlichen.

Wir wollen zeigen dass jede derartige $F(u)$ in der Form darst. lässt

$$G = e^{G(u)}$$

Beweis:

$$\text{Man } G' = e^{G(u)} G'(u) = G G'_1$$

$$\frac{G'}{G} = G'_1$$

Der Annahme nach ist G nie Null, daher $\frac{G'}{G}$ nie unendlich lässt sich in Pot. R. darstellen die Zustand const.

$$\frac{G'}{G} = C_0 + C_1 u + \dots = \sum_0^{\infty} C_n u^n = G'_1 u$$

Wir haben jetzt eine $F(u)$ gebildet deren Ableitung dieser Gleichung ist nämlich

$$C + \sum_0^{\infty} \frac{C_n}{n+1} u^{n+1} = G u$$

Wo das C bestimmt wird, indem die $F(u)$ einen vorgegeb. Werth annehmen soll für $u=a$. Die Constante könnte auch als Factor erscheinen

4ten Mai '81

$$G(u) = G_0(0) e^{\int_0^u G_0(t) dt} = G_0(0) e^{\sum \frac{c_v}{v+1} u^{v+1}}$$

$$G_0(0) = c^0$$

$$G(u) = e^{c + G_0(u)}$$

Wir wollen eine F_u so festsetzen, dass

- 1 die erste Ableit. gleich sich selbst multipl. mit einer Pot. K_v ist, und
- 2 $F_0(0)$ einen vorgegebenen Wert annehmen soll.

$$(1) \quad G_0(0) = c$$

$$(2) \quad G'(u) = \sum c u^v \cdot G(u)$$

Dies ist immer mögl. wenn $\sum c u^v$ konvergiert, denn wenn $\sum c u^v$ konv. so konv. auch $\sum \frac{c_v}{v+1} u^{v+1}$ und konv. auch die erste Abl. so haben beide Seiten der Gl (2) denselben Conv. Bereich.

Der Ausdruck

$$(3) \quad G(u) = c_0 e^{\sum \frac{c_v}{v+1} u^{v+1}}$$

gibt alle solche Funktionen an, denn hier ist

$$(4) \quad \overline{G'(u)} = \sum c_v u^v \cdot \overline{G(u)}$$

Bestehen (2) und (4), so kann man $\sum c_v u^v$ daraus eliminieren und erhält.

$$\frac{\bar{G} G' - G \bar{G}'}{G \cdot \bar{G}} = 0 = \frac{2 \cdot G}{au \bar{G}} \quad (\text{nicht wahr!})$$

Besser hat man direct, wenn

$$\frac{G'u}{Gu} = \frac{\bar{G}'u}{\bar{G}u}$$

so muss Gu sich von $\bar{G}u$ nur um einen constanten Factor unterscheiden.

Oder aus $G'u$

$$\text{Die Fk. } G(u) = c_0 e^{\sum \frac{G'u}{u} u^{u-1}} = c e^{G_1(u)}$$

wo $G(0) = 0$ hat die 2 verlangte Eigensch.

Wir bezeichnen mit a , eine Nullstelle einer Fk., und, damit die Anzahl der Nullstellen im Endlichen eine endliche sei, stellen wir die Bedingung auf für die Reihe $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ es soll $\lim (a_n) = \infty$ für $n = \infty$.

Es soll

1 die Fk. darstellbar sein d. eine feständig convergirende Pot. Reihe, und

2 $f(a_n) = 0$

3 $f'(a_n) \neq 0$ $f''(a_n) = 0$.

Die f_u wird auch durch diesen Prozess erzeugt:

$$G(u) = C_\lambda (u-a)^\lambda + C_{\lambda+1} (u-a)^{\lambda+1} + \dots$$

$$G'(u) = \lambda C_\lambda (u-a)^{\lambda-1} + (\lambda+1) C_{\lambda+1} (u-a)^\lambda + \dots$$

$$\frac{G'(u)}{G(u)} = \frac{\lambda + \frac{(\lambda+1)C_{\lambda+1}}{C_\lambda} (u-a) + \dots}{(u-a) \left(1 + \frac{C_{\lambda+1}}{C_\lambda} (u-a) + \dots \right)}$$

$$= \frac{\lambda}{u-a} + P(u-a)$$

Diese F_u G muss $= 0$ für $u=a$; d.h. hat die verlangte Eigen. was die einzige Nullstelle a anbetrifft. Nur alle Nullstellen a_1, \dots, a_n zu enthalten aber muss die F_u die Form haben

$$F_u = \sum \frac{1}{u-a_i} = \frac{G'}{G}$$

aber es haben auch andere F_u dieselbe Eigensch. Wir nehmen an

$$F_u = \sum_v \frac{g_v u}{(u-a_v) g_v(a_v)}$$

Wenn diese Reihe convergiert, so hat sie die obige Eigensch., denn $\frac{g_v u}{(u-a_v) g_v(a_v)}$ lässt sich auf die Form bringen

$$\frac{1}{u-a} + \frac{g_v u - g_v a}{(u-a) g_v a}$$

$$= \frac{1}{u-a} + \left(u \frac{g_v}{g_v a} - 1 \right) \frac{1}{1 - \frac{a}{u}}$$

re (ist aber fast sich in einer P.K. entwickeln, und

$$f(u) = \frac{1}{u-a} + \mathcal{P}(u-a) = \frac{G'}{G}$$

Wenn das g.u. specialisieren wir

$$f(u) = \sum \frac{u^{m_v}}{(u-a_v) \cdot a_v^{m_v}}$$

wo a so gewählt werden kann, dass die Reihe beständ. conv. wird.

$$f(u) = - \sum \frac{1}{1-\frac{u}{a_v}} \cdot \frac{1}{a_v} \cdot \frac{1}{a_v^{m_v}}$$

Man kann zu der Reihe der Nullstellen

6,5, '81

a_1, a_2, \dots, a_n

eine zweite Reihe so zuordnen

m_1, m_2, \dots, m_n

dass die Furch.

$$F(u) = \sum \frac{u^{m_v}}{(u-a_v) a_v^{m_v}}$$

als einer endl. Writte lat. (Bei dieser $F(u)$ sind die a_v an unendl. krit. Stellen, bei der $F(u)$ $G(u)$ dagegen Nullstellen). Man kann dann eine transcendente $F(u)$ bilden, welche a_1, \dots, a_n zu Nullstellen haben soll, nämlich $G(u)$ in

$$G(u) = G(u) \cdot F(u).$$

und $G(u)$ hat keine andere Nullst. als a_1, \dots, a_n .

Wir setzen zuerst ein einziges Glied

$$f(u) = \frac{u^m}{(u-a)u^m}$$

Dies kann in die Form gebracht werden

$$= \frac{u^m - a^m}{(u-a)u^m} + \frac{1}{u-a}$$

$$f(u) = \frac{1}{u-a} + \frac{u^{m-1}}{u^m} + \frac{u^{m-2}}{u^{m-1}} + \dots + \frac{u^0}{a}$$

Bezeichnen wir nun mit

$$g(u) = \left(1 - \frac{u}{a}\right) e^{\frac{u}{a} + \frac{1}{2} \frac{u^2}{a^2} + \dots + \frac{1}{m} \frac{u^m}{a^m}}$$

$$g'(u) = \left(\left(1 - \frac{u}{a}\right) \left(\frac{1}{a} + \frac{u}{a^2} + \frac{u^2}{a^3} + \dots + \frac{u^{m-1}}{a^m} \right) + \frac{1}{a} \right) e^{\dots}$$

Faktor
nur

$$\frac{g'(u)}{g(u)} = \frac{1}{u-a} + \frac{1}{a} + \frac{u}{a^2} + \frac{u^2}{a^3} + \dots + \frac{u^{m-1}}{a^m}$$

$$f(u) = \frac{1}{u-a} + \frac{u}{a^2} + \frac{u^2}{a^3} + \dots + \frac{u^{m-1}}{a^m}$$

$$f(u) = \left(1 - \frac{u}{a}\right) \left(\frac{1}{a} + \frac{u}{a^2} + \dots + \frac{u^{m-1}}{a^m} \right) e^{\frac{u}{a} + \frac{1}{2} \frac{u^2}{a^2} + \dots + \frac{1}{m} \frac{u^m}{a^m}}$$

$$= \left(-\frac{1}{a} + \frac{1}{a} + \frac{u}{a^2} + \frac{u^2}{a^3} + \dots + \frac{u^{m-1}}{a^m} \right) e^{\frac{u}{a}}$$

Unser einzelnes Glied ist $\frac{u^m}{a^{m+1}} - \frac{u^m}{a^{m+1}} e^{\frac{u}{a}}$

$$f(u) = \frac{u^0}{a} + \frac{u}{a^2} + \dots + \frac{u^{m-1}}{a^m} = f' = -\frac{u^m}{a^{m+1}} e^{\frac{u}{a} + \frac{1}{2} \frac{u^2}{a^2} + \dots}$$

$$f(u) = \frac{u^m}{(u-a)a^{m+1}}$$

$$f(u) = \left(1 - \frac{u}{a}\right) e^{\frac{u}{a} + \frac{1}{2} \frac{u^2}{a^2} + \frac{1}{3} \frac{u^3}{a^3} + \dots + \frac{1}{m} \frac{u^m}{a^m}}$$

$$f'(u) = \left(-\frac{1}{a} + \frac{1}{a} + \frac{u}{a^2} + \frac{u^2}{a^3} + \dots + \frac{u^{m-1}}{a^m} - \frac{u}{a^2} - \frac{u^2}{a^3} - \frac{u^3}{a^4} - \dots - \frac{u^{m-1}}{a^m} - \frac{u^m}{a^{m+1}} \right) e^{\frac{u}{a} + \frac{1}{2} \frac{u^2}{a^2} + \dots}$$

$$\frac{f'}{f(u)} = \frac{-\frac{u^m}{a^{m+1}}}{\frac{u^m}{(u-a)a^{m+1}}} = \frac{-a u^m}{(u-a)a^{m+1}} = \frac{u^m}{(u-a)a^m}$$

Begleiten wir mit

$$\begin{aligned} E(u, 0) & \text{ die Fk } 1-u \\ E(u, 1) & \text{ " " } (1-u)e^u \\ E(u, 2) & \text{ " " } (1-u)e^{u+\frac{1}{2}u^2} \\ & \text{ " " " " " " } \\ E(u, n) & \text{ " " } (1-u)e^{u+\frac{1}{2}u^2+\dots+\frac{1}{n}u^n} \end{aligned}$$

so ist $\frac{f(u)}{f(u)} = E\left(\frac{u}{a}, n\right) = E\left(\frac{u}{a}, n\right) \cdot \frac{u^m}{(u-a)a^m}$

Diese Fk theilt man in 2 Theile von
ersten bis zum n ten Glde, und n bis zum
 n ten Glde. und schreibt man

$$F(u) = \overline{F(u)} + \overline{F(u)}$$

Man nehmen jetzt die Funct. $\prod_{n=1}^{\infty} E\left(\frac{u}{a}, n\right)$
welches sich auf den ersten Theil bezieht
so ist derselbe

$$\begin{aligned} &= \frac{\partial}{\partial u} \prod_{n=1}^{\infty} E\left(\frac{u}{a}, n\right) = \overline{F(u)} \cdot \prod_{n=1}^{\infty} E\left(\frac{u}{a}, n\right) \quad \text{denn} \\ \prod_{n=1}^{\infty} E\left(\frac{u}{a}, n\right) &= (1-\frac{u}{a}) e^{\frac{u}{a} + \frac{u^2}{2a^2} + \dots + \frac{1}{n} \frac{u^n}{a^n}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F(u) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u^m}{(u-a)a^m} = \sum_{n=0}^n \frac{u^m}{(u-a)a^m} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{u^m}{(u-a)a^m} \\ &= \overline{F(u)} + \overline{F(u)} \end{aligned}$$

Um $\overline{F(u)}$ zu untersuchen bringen wir sie
auf die Form $-\sum \frac{1}{1-\frac{u}{a}} \cdot \frac{u^m}{a^{m+1}}$

$$f(u) = E\left(\frac{u}{a}, n\right)$$

$$\frac{f(u)}{f(u)} = \frac{u^m}{(u-a)a^m}$$

$$\begin{aligned} f'(u) &= -\frac{u^m}{a^{m+1}} e^{\frac{u}{a} + \frac{1}{2}\frac{u^2}{a^2} + \dots} \\ &= -u^m \end{aligned}$$

$$\frac{P(u)}{P(u)} = - \overline{F(u)} = - \sum_n \frac{1}{1 - \frac{u}{a_n}} \cdot \frac{u^{m_n}}{a_n^{m_n+1}}$$

wo $F(u) \rightarrow \infty$ wird an den Stellen a_n, m_n, \dots

Plaziert sich in ein Pol R. entwer.

$$P(u) = \sum_0^{\infty} c_n u^n.$$

Man setze $P(u) = \sum_0^{\infty} \frac{c_{n\mu}}{\mu+1} u^{\mu+1}$

$$P'(u) = \sum_0^{\infty} c_{n\mu} u^{\mu} = P(u)$$

Nehmen wir nun $\bar{e}^{-\bar{P}(u)}$ von n ten Gliede an
so ist ihre Abl $-\bar{e}^{-\bar{P}} \cdot \bar{P}'(u) = \bar{e}^{-\bar{P}} \cdot \bar{P}(u)$

$$F(u) = \frac{G'u}{G_u} = \prod_n E\left(\frac{u}{a_n}, m_n\right) \cdot e^{-\bar{P}(u)}$$

$$F_0 = 0 \quad e^{-P_0} = 1$$

$$G_u = \prod_n E\left(\frac{u}{a_n}, m_n\right) e^{-\bar{P}(u)}$$

Die Fk

$$F(u) = \sum_1^{\infty} \frac{1}{u-a_v} \left(\frac{u}{a_v}\right)^{m_v}$$

7. Mai '81.

mit der Anzahl gegebener Nullstellen wurde
in 2 Theile zerlegt.

$$= \sum_1^m \frac{1}{u-a_v} \left(\frac{u}{a_v}\right)^{m_v} + \sum_{n+1}^{\infty} \frac{1}{u-a_v} \left(\frac{u}{a_v}\right)^{m_v}$$

Nun ist $\prod E\left(\frac{u}{a_v} m_v\right)$

eine Fk. deren erste Ableitung gleich ist
den $m+1$ ersten Glieder der obigen Reihe.

7. Mai '81

$$E\left(\frac{u}{a_v} m_v\right)$$

$$G(u) = \prod E\left(\frac{u}{a_v} m_v\right)$$

$$\frac{G'(u)}{G(u)} = \sum_1^m \frac{1}{u-a_v} \left(\frac{u}{a_v}\right)^{m_v} - \frac{\partial}{\partial x} \bar{P}(u)$$

$$\sum_1^m \frac{1}{u-a_v} \left(\frac{u}{a_v}\right)^{m_v} = \sum_{v=m+1}^{\infty} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{m_v+r} \left(\frac{u}{a_v}\right)^{m_v+r} = \bar{P}(u)$$

$\bar{P}(u)$ muss berechnet werden können für ein
gegebenes u .

$$\bar{P} < \sum_0^{\infty} \sum_{r=1}^{\infty} \left|\frac{u}{a_v}\right|^{m_v+r}$$

wo da alle Gldn + die Convergence eine unbedingte
ist. Die Summation i Bf r geht

$$\sum_0^{\infty} \frac{1}{1-\left|\frac{u}{a_v}\right|} \cdot \left|\frac{u}{a_v}\right|^{m_v+1}$$

welches conv't für $\frac{u}{a_v} < 1$.

Gehört die Null selbst unter den Nullstellen $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ so fügt man den Factor u^λ hinzu
 wo λ den Grad des Null-Wordens bedeutet.

$$G_u = u^\lambda \prod_{i=1}^m \left(e(\frac{u}{\alpha_i} \cdot m) \right) \cdot e^{-P(u)}$$

Soll eine Fv. überall den Char. einer ration. Fv. haben so ist sie darstellbar, wenn
 (sie beständig convt ist eine Pot Reihe
 (sie sing Stellen hat d. Quot. 2er Pot Reihen.

Eine Fv. welche ein Add. Th. besitzt verhält
 sich im Endl. wie eine rat. Fv.
 und lässt sich darstellen als eine conv. Pot R. oder als Quot. 2er solchen.

$$\varphi u - b = 0$$

9.3-

ist lösbar für m Werte des u , so ist
 $\varphi u - b'$ lösbar für mindestens $m+1$ Werte von u
 wo b' in der Umgebung von b liegt

$$\varphi u - b = 0$$

$$\varphi u_1 - b' = 0$$

$$\varphi u - \varphi u_1 = b - b'$$

Die Entwicklung von diesem fängt an mit

$$c_1(u-u_1)^1 + c_2(u-u_1)^2 + \dots = b - b'$$

Man div. d. c_1 und ziehe die μ_1 te Wurzel

$$(u-u_1) + \frac{c_2}{c_1}(u-u_1)^{\mu_2-\mu_1} + \dots = \left(\frac{b-b'}{c_1}\right)^{\frac{1}{\mu_1}} \quad (A)$$

$$\text{Daher } u - u_1 = \left(\frac{b-b'}{c_1}\right)^{\frac{1}{\mu_1}} \cdot \rho \left(\frac{b-b'}{c_1}\right)^{\frac{1}{\mu_1}} \quad (B)$$

Man beschr. um b einen kleinen Kreis b.3
 so dass jeder Punkt des Kreises im Conv. Ber.
 von (B) liegt: so entspricht jedem
 b' in diesem Kreis wenigstens 1 Werte
 des u . Da nun $\varphi u = b$ ist der Annahme
 noch für m Werten des u so ist $\varphi u_1 = b'$
 für mindestens m Werten des u .

In der u -Ebene ziehe man einen
 grossen Kreis, so gibt es Werte ~~ausser~~
 des Kreises für welche $\varphi u = b$

u_1
 u_2
 u_3

Ist $qu = 3$ nur et m Werte des u
überhaupt lösbar so ist alle eine rat. Fv.
Dies als Hilfsf.

Wir gehen zurück auf eine eindeutige Fk.
 die ein Add. Th. besitzt. Diese lässt
 sich als Quotient zweier conv. Pot. Reihen
 darstellen. Es sei eine solche Fk. φ
 so besteht $G(\varphi(u+v), \varphi u, \varphi v) = 0$

Dies soll vom Grade n in $\mathcal{A}(u+v)$ sein.
 Man nehme ζ so dass $\varphi v = \zeta$ für
 mehr als n versch. Wörte des v .
 Dann seien v_1, \dots, v_{n+1} , so ist

$$G(\varphi(u+v_i) \varphi u, \zeta) = 0$$

für $v = v_1, \dots, v_{n+1}$.

G kann nicht mehr als n verschiedene
 Wörte des $\varphi(u+v)$ $\varphi(u+v_1), \dots, \varphi(u+v_{n+1})$

Da aber $\varphi v = \zeta$ für mehr als n Wörte so
 müssen mindestens 2 von $\varphi(u+v_i)$
 einand gl. sein.

Dann nehme man allgemein an
 die Fkⁿ $f_1 u, f_2 u, \dots, f_{n+1} u$
 seien darstellbar d. P.R. und, dass
 für jeden Wört des u 2 davon einand
 gl. sind so hat man

$$\begin{array}{cccc} (f_1 u - f_2)(f_1 - f_3) & \dots & (f_1 - f_{n+1}) \\ & & (f_2 - f_3) & \dots & (f_2 - f_{n+1}) \\ & & \dots & & \dots \end{array}$$

so muss dies Prod. oder

$$\prod_{\lambda \neq \mu} (f_\lambda - f_\mu) = 0$$

für jeden Werth des Argument, und in der Entwickl. in P.R. müssen alle Coeff. = 0.

Dasselbe gilt wenn die Fv sich als Quot. zeigt, wir. ~~$f_\lambda - f_\mu = \frac{g_\lambda}{h_\lambda} - \frac{g_\mu}{h_\mu}$~~ $f_\lambda(u) = \frac{g_\lambda u}{h_\lambda u}$

$$f_\lambda - f_\mu = \frac{g_\lambda h_\mu - h_\lambda g_\mu}{h_\lambda h_\mu}$$

was dies = 0 wird $g_\lambda h_\mu - h_\lambda g_\mu = 0$

und $\frac{g_\lambda}{h_\lambda} - \frac{g_\mu}{h_\mu} = 0$ Q.E.D.

Es muss dann für jedes u

$$\varphi(u + v_\lambda) = \varphi(u + v_\mu)$$

Hier setzen $u = u - v_\mu$

$$\varphi(u + v_\lambda - v_\mu) = \varphi(u)$$

$v_\lambda - v_\mu = \text{const} = \text{Periode der Function.}$

Hier aber ist stillschweigend vorausgesetzt worden dass $\varphi = \text{transcendental Fv.}$

Für die rat. F. folgt es aber d. Elem.

Die F. muss unendl. viele aus dieser
abgeleitete Perioden besitzen

$$\varphi(u) = \varphi(u+w) = \varphi(u+2w) \dots = \varphi(u+mw)$$

Wir nehmen an sie habe auch eine 2te
Periode $\varphi(u+\mu'w') = \varphi(u)$

So muss sie viele weitere

$$\varphi(u+\mu w + \mu'w') = \varphi(u)$$

Hätte sie auch eine 3te Periode so wäre

$$\varphi(u+\mu w + \mu'w' + \mu''w'') = \varphi(u).$$

Analys. Beweis.

Es sei $w' w''$ 2 complexe f^m deren
Verhältniss auch complex ist, so ist jede
Periode darstellbar

$$u = \alpha w' + \beta w''$$

wo α und β re. sind.

Es sei

$$w' = g + hi$$

$$w'' = g' + h'i'$$

mit der Annahme $gh' - gh'' = 0$

Dann wäre $g = \mu g' ; h = \mu h'$.

Es sei

$$\alpha = \xi + \eta i$$

so muss

$$\xi = \alpha g + \beta g'$$

$$\eta = \alpha h + \beta h'$$

woraus α und β re. bestimmt wegen der

Annahme.

$$\alpha = \frac{\begin{vmatrix} g' & h' \\ h & g \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} g' & h' \\ g' & h' \end{vmatrix}} \quad \beta = \frac{\begin{vmatrix} g & h \\ g' & h' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} g' & h' \\ g' & h' \end{vmatrix}}$$

Es haben denn $w' w''$ kein re. Verhält.

7.

$$w = \alpha' w' + \beta' w''$$

Setze man $\beta = 0$ und nenne das
kleinste α' so dass

$$u = \alpha' w'$$

Ähnlich ist β' das kleinste β , so ist
die Prim. Periode

$$u = \alpha' w' + \beta' w''$$

$$w' = \frac{\beta'}{\alpha'} w''$$

$$w'' = \frac{\alpha'}{\beta'} w'$$

$$w' = \alpha' w' + \beta' w''$$

α' & β' müssen ganz. Zahlen sein. Denn
seinem μ & die größten in ihnen γ, δ .

so sei $w = \mu w' + \nu w'' + \gamma w' + \delta w''$

$$w - \mu w' - \nu w'' = \gamma w' + \delta w''$$

links ist eine Periode, so muss auch rechts.
aber $\gamma < 1$ $\delta < 1$ und $\gamma w' < w''$ $\delta w' < w''$
was gegen die Annahme ist da
 w' w'' die kleinsten Perioden waren.

Ist ξ_1, ξ_2 real & $0 < \xi_1 < 1$ $0 < \xi_2 < 1$

und $u = \xi_1 w_1 + \xi_2 w_2$

so ist der Integriert aller u unter dieser
Definition das was man das prim. Periode
Parallelogramm.

Eine gebrochene transcend. Fk $\frac{g_1 u}{g_2 u}$
 ist dopp. periodisch und kann im Per.
 Parall. ∞ oder Null werden und ~~gera~~
 aus ∞ vielen Stellen im Ganzen da die
 Anzahl der Per. Parall eine unendl. ist.

13 Mai

Servatius

der kalte Mann.

Die Fk. nimmt dieselben Werthe an
 an gewissen den ~~angew~~ entsprechenden
 Stellen in allen Per. Parall. der Ebene.
 Discutiren wir also das eine prim. Per. Parall.
 so können wir alle andern dahin sehen.

Es seien u, \dots, u_v die Nullstellen
 einer solchen Fk. so kann man
 eine Fk. herstellen mit diesen und
 keinen andern 0 Stellen. Eine solche Fk. ist

$$\begin{aligned} & \sigma(u) \\ &= u \prod' (1 - \frac{u}{w}) e^{\frac{u}{w} + \frac{1}{2} \frac{u^2}{w^2}} = u \prod'' (1 - \frac{u^2}{w^2}) e^{\frac{u^2}{w^2}} \\ &= u (1 + * - \frac{1}{2} \sum'' \frac{1}{w^4} u^4 - \frac{1}{3} \sum'' \frac{1}{w^6} u^6 - \dots) \\ &= u + * - \frac{1}{4} \sum' \frac{1}{w^4} u^5 - \frac{1}{6} \sum' \frac{1}{w^6} u^7 - \dots \end{aligned}$$

Tabell 1

Denn $\sigma(u - u_1)$ ist eine Fk. mit der 0 Stelle
 $u_1 + w$. $\sigma(u - u_1) \sigma(u - u_2) \dots \sigma(u - u_v)$
 eine Fk. mit den Nullstellen u, u_1, \dots, u_v .

$$\frac{g_u}{g_{2u}} = \frac{e^{g^3} \cdot \sigma(u-u_1) \sigma(u-u_2) \dots}{e^{g^4} \cdot \sigma(u-v_1) \sigma(u-v_2) \dots} \quad e^{g^5} = 1$$

$$\phi u = \left(e^{g^4} \frac{\sigma(u-u_1) \sigma(u-u_2) \dots}{\sigma(u-v_1) \sigma(u-v_2) \dots} \right)$$

wo von den Nullstellen die Null selber ausgeschlossen
schonem wird.

Zu der Reihe $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$
wird die R. zugeordnet m_1, m_2, \dots, m_n
unter den Bedingungen dass die Summe
$$\sum_v \left| \frac{u}{a_v} \right|^{m_v+1}$$

endlich bleiben soll ($a=0$ ausgeschlossen)
für jedes u . Man nehme alle m_v
einander gleich $\delta = 2$ so wird die R.
$$\sum_v \left| \frac{u}{a_v} \right|^3$$

$$= u^3 \sum_v \left| \frac{1}{a_v} \right|^3 \quad w = v \cdot r$$

da u keinen Einfluss auf die Summierbarkeit
hat solange $u \neq 0$ $u = \text{edl.}$

Wir betrachten alle Werthe des w , wo

$$\max(|v| \text{ und } |v'|) = \pi = 1, 2, 3, 4, \dots$$

So gibt es von v $2\pi+1$ Werthe

$$v' \quad \frac{2\pi+1}{2}$$

der Combinationen $(2\pi+1)^2$

$$\frac{1}{(w)^{m+1}} = \frac{1}{r^{m+1}} \cdot \frac{1}{(r')^{m+1}}$$

$$w = 2v'w + 2v'w'$$

Da v von $-r$ bis $+r$ incl. läuft so enthält die Anzahl mögl. Werte $2r+1$

Diese Anzahl kombiniert mit der gl. Anzahl für v' gibt $(2r+1)^2$

als die Anzahl der mögl. Combinationen.

Die Anzahl von Werten des v die kleiner als r sind ist $2r-1$, auch für v'

Die Combinationen dieser $(2r-1)^2$

Die Diff. gibt an die Anzahl der Combis. wo v und $v' = r$ sind, nämlich

$$(2r+1)^2 - (2r-1)^2 = 8r$$

Wir untersuchen dann die Convergence von $\sum \left(\frac{1}{w}\right)^3$

wo $w = v \cdot r$, und wo $r =$ der Max. wert der w nur höchstens 8 mal angenommen wird. Wir setzen diese 8 mal auseinander, dann wird

$$\sum \left(\frac{1}{w}\right)^3 \leq \frac{8}{K^3} \sum \frac{1}{r^2}$$

Der Ausdruck rechts convergirt. Q. E. D.

$$(r=0) \quad \sum^0 \left(\frac{1}{w}\right)^3 \leq \frac{1}{K^3} \frac{8}{r^2}$$

$$" 1 \quad \sum^{(1)} \left(\frac{1}{w}\right)^3 \leq \frac{1}{K^3}$$

$$" 2 \quad \sum^{(2)} \left(\frac{1}{w}\right)^3 \leq \frac{1}{K^3} \left(\frac{8}{1} + \frac{8}{4} \right) \dots \sum^{\infty} \leq \frac{8}{K^3} \sum \frac{1}{r^2}$$

$$\sum \left| \frac{u}{a_n} \right|^{m_{n+1}} = \text{undl. für jedes } u.$$

$$\sum_0^\infty \frac{u^n}{n!} = 1 + u + \frac{u^2}{2} + \dots = e^u$$

$$\sum_0^\infty \frac{u^n}{w^n \cdot n!} = e^{\frac{u}{w}}$$

$$\sum \frac{u^n}{w^n \cdot n!} \cdot \sum \frac{u^2}{(2w)^n \cdot n!} \cdot \sum \frac{u^{3n}}{(2 \cdot 3 \cdot w)^n \cdot n!} \dots = e^{\frac{u}{w} + \frac{1}{2} \frac{u^2}{w^2} + \frac{1}{2 \cdot 3} \frac{u^3}{w^3} + \dots}$$

$$\text{II} \sum \frac{1}{n!} \cdot \left(\frac{u^{2n}}{2w} \right) = e^{\frac{u^2}{2w^2}}$$

$$\sum \frac{1}{n!} \left(\frac{u^{3n}}{2 \cdot 3 \cdot w} \right) = e^{\frac{u^3}{2 \cdot 3 \cdot w^3}}$$

$$\sum \frac{1}{n!} \left(\frac{u^{r \cdot n}}{w \cdot r} \right) = e^{\frac{u^r}{w^r \cdot r}}$$

$$\prod_{r=1}^\infty \sum \frac{1}{n!} \cdot \left(\frac{u^{r \cdot n}}{r! \cdot w} \right) = e^{\frac{u}{w} + \frac{1}{2} \frac{u^2}{w^2} + \frac{1}{3} \frac{u^3}{w^3} + \dots + \frac{1}{m} \frac{u^m}{w^m}}$$

$$f' = e^{\frac{u}{w} + \frac{1}{2} \frac{u^2}{w^2} + \dots + \frac{1}{m} \frac{u^m}{w^m}}$$

$$f'' = \left(\frac{1}{w} + \frac{u}{w^2} + \dots + \frac{u^{m-1}}{w^{m-1}} \right) e^{\frac{u}{w} + \dots + \frac{1}{m} \frac{u^m}{w^m}}$$

$$\frac{\partial}{\partial u} \left(1 - \frac{u}{w} \right) f = \frac{\partial}{\partial u} \left(f - \frac{u}{w} f \right) = f' - f' \frac{u}{w} - f \frac{1}{w}$$

$$= f' \left(1 - \frac{u}{w} - \frac{1}{w} \right) = f' \left(\frac{w-u-1}{w} \right)$$

$$= f' \left(1 - \frac{u}{w} \right) - f' \frac{1}{w}$$

$$f' = \frac{1}{w} + \frac{u}{w^2} + \dots + \frac{u^{m-1}}{w^{m-1}} e^{1-}$$

$$+ f' \frac{u}{w} = \frac{\frac{u}{w^2} + \dots + \frac{u^{m-1}}{w^{m-1}} + \frac{u^m}{w^{m+1}}}{e^{1-}}$$

$$f' - f' \frac{u}{w} = \left(\frac{1}{w} - \frac{u^m}{w^{m+1}} \right) e^{1-} = \frac{1}{w} e^{1-} - \frac{u^m}{w^{m+1}} e^{1-}$$

$$\frac{\partial}{\partial u} (1 - \frac{u}{w}) f = f' - f' \frac{u}{w} - f' \frac{1}{w}$$

$$f' - f' \frac{u}{w} = \frac{1}{w} e^{(1)} - \frac{u^m}{w^{m+1}} e^{(1)}$$

$$f' \frac{1}{w} = \frac{1}{w} e^{(1)}$$

$$\frac{\partial}{\partial u} (1 - \frac{u}{w}) f = - \frac{u^m}{w^{m+1}} e^{(1)}$$

$$\frac{u}{w} + \frac{1}{2} \frac{u^2}{w^2} + \dots + \frac{1}{m} \frac{u^m}{w^m} = Z$$

für $w=2$ $u + \frac{u^2}{2} + \dots + \frac{u^m}{m} = K$

$$\frac{\partial K}{\partial u} = 1 + u + u^2 + \dots + u^{m-1} = \frac{1}{1-u} - \frac{1}{u^m} = \frac{u^m - 1}{u-1}$$

für $w=2$

$$Z = \frac{u}{2} + \frac{u^2}{2 \cdot 2} + \frac{u^3}{3 \cdot 2^2} + \dots + \frac{u^m}{m \cdot 2^m}$$

$$\frac{\partial Z}{\partial u} = \frac{(\frac{u}{2})^{m-1} - 1}{\frac{u}{2} - 1}$$

für $w=3$ $Z = \frac{u}{3} + \frac{1}{2} (\frac{u}{3})^2 + \frac{1}{3} (\frac{u}{3})^3 + \dots + \frac{1}{m} (\frac{u}{3})^m$ etc.

$$\frac{\partial}{\partial u} (1 - \frac{u}{w}) e^{(1)} = - \frac{u^m}{w^{m+1}} e^{(1)} = f'$$

$$\frac{f'}{f} = \frac{- \frac{u^m}{w^{m+1}}}{1 - \frac{u}{w}} = \frac{- \frac{u^m}{w^{m+1}}}{\frac{w-u}{w}} = \frac{u^m}{w^m (u-w)}$$

$$\frac{f'}{f} = \frac{1}{u-w} \cdot \frac{u^m}{w^m} = \log. \text{ Ableit.}$$

Die Funct. selber muss sein
 $(1 - \frac{u}{w}) e^{\frac{u}{w} + \frac{u^2}{2w^2} + \dots + \frac{1}{m} \frac{u^m}{w^m}}$

Ist dann $g = \prod (1 - \frac{u}{w}) e^{\frac{u}{w} + \dots}$

es ist $\frac{g'}{g} = \sum_{w=1}^{\infty} (\frac{1}{u-w}) \frac{u^m}{w^m}$

$$f = \left(1 - \frac{u}{w}\right) e^{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cdot \frac{u^n}{w^n}}$$

$$\frac{f'}{f} = \frac{1}{u-w} \cdot \frac{u^m}{w^m}$$

$$\sigma u = u \cdot \prod \left(1 - \frac{u}{w}\right) e^{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cdot \frac{u^n}{w^n}}$$

$$\log \sigma u = l.u + l. \sum \left(1 - \frac{u}{w}\right) e^{\sum}$$

$$\frac{\sigma' u}{\sigma u} = \frac{1}{u} + \sum' \frac{1}{u-w} \cdot \frac{u^m}{w^m} \quad w \neq 0.$$

Es wird dann $m=2$ gesetzt aber warum
wird das Proof.

$$\frac{\sigma' u}{\sigma u} = \frac{1}{u} + \sum' \left(\frac{1}{u-w} + \frac{1}{w} + \frac{u}{w^2} \right) \quad w \neq 0.$$

$$\phi(u) = C e^{g_0} \frac{\sigma(u-u_1) \sigma(u-u_2) \dots \sigma(u-u_n)}{\sigma(u-v_1) \dots \sigma(u-v_n)}$$

weil die Anzahl der 0 Stellen gl. ist der Anzahl
der ∞ Stellen.

$$\sigma u = u \Pi \left(1 - \frac{u}{w}\right) e^{\frac{u}{w} + \frac{u^2}{2w^2}} \quad \text{mit } au = 2.$$

$$w = 2v\omega + 2v'\omega' \quad v, v' \in \mathbb{C} \quad -\infty < v, v' < +\infty.$$

Dies entspringt aus

$$\frac{\sigma' u}{\sigma u} = \frac{1}{u} + \sum' \left(\frac{1}{u-w} + \frac{1}{w} + \frac{u}{w^2} \right)$$

Setzt man $-v$ & $-v'$ statt v & v' in $-w$ statt w so wie aus $\sigma u = u \Pi$ zu ersehen ist, ist σu eine ungerade Funct.

$$\sigma(-u) = -\sigma u.$$

Auch ist $\frac{\sigma' u}{\sigma u}$ ungerade, weil der Zähler ger. ist

$$\frac{1}{u-w} + \frac{1}{w} + \frac{u}{w^2} = -\frac{u}{w^2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{u}{w}}$$

Dies entwickelt gibt

$$\frac{\sigma' u}{\sigma u} = -\sum \left(\frac{u}{w^2} + \frac{u^2}{w^3} + \frac{u^3}{w^4} + \dots \right) + \frac{1}{u}$$

$$\sum \frac{1}{w} = C_v$$

Es bleiben also $+\sum \frac{1}{u-w}$ und $+\sum \frac{u}{w^2}$

Aus A.

$$\frac{1}{u-w} = -\frac{1}{w} - \frac{u}{w^2} - \frac{u^2}{w^3} - \frac{u^3}{w^4} - \frac{u^4}{w^5} - \dots$$

$$\frac{1}{w} = +\frac{1}{w}$$

$$\frac{u}{w^2} = \frac{u}{w^2}$$

$$\frac{\sigma' u}{\sigma u} = -\sum \left(\frac{u^2}{w^3} + \frac{u^3}{w^4} + \frac{u^4}{w^5} + \frac{u^5}{w^6} + \dots \right) + \frac{1}{u}$$

Da aber $\frac{\sigma' u}{\sigma u}$ ungerade ist, so fehlen die geraden Potenzen

$$\frac{\sigma' u}{\sigma u} = -u^3 \sum \frac{1}{w^4} - u^5 \sum \frac{1}{w^6}$$

Weierstrass. Ellipt. Funct. 3

14. Mai.

Sonnabend.

A

Da wieder $\frac{\sigma'}{\sigma}u$ ungerade ist,

$$\frac{\sigma' u}{\sigma u} = \frac{1}{u} - \sum_1^{\infty} c_v u^{2v+1}$$

$$\sigma u = u \cdot e^{-\sum_1^{\infty} c_v \frac{u^{2v+2}}{2v+2}}$$

$$= u \left(1 - \frac{c_1}{4} u^4 - \frac{c_2}{6} u^6 - \dots \right)$$

wo $\left(\frac{1}{w}\right)^4 = c_1$ $\left(\frac{1}{w}\right)^6 = c_2$ etc.

Die übrigen Glieder sind durch eine Diffgl. mit bestimmt, nämlich:

$$\sigma' u = \sigma u \cdot g u.$$

Um $g u$ zu bestimmen, hat man

$$\frac{\sigma'(u+2w)}{\sigma(u+2w)} - \frac{\sigma' u}{\sigma u} = g' u$$

$$\frac{d}{du} \frac{\sigma' u}{\sigma u} = p' u$$

$$p u = \frac{1}{u^2} + \sum \left(\frac{1}{(u-w)^2} - \frac{1}{w^2} \right) \quad u \neq 0.$$

$$p u = \frac{1}{u^2} + \sum \left(\frac{1}{(v-w)^2} - \frac{1}{w^2} \right)$$

$$p u - p v = \sum \left(\frac{1}{(u-w)^2} - \frac{1}{(v-w)^2} \right)$$

$$p(u+2w) - p(v+2w) = \sum \left(\frac{1}{(u-w+2w)^2} - \frac{1}{(v-w+2w)^2} \right)$$

$$p(u+2w) - p(v+2w) = p u - p v$$

$$p(u+2\omega) - pu = p(v+2\omega) - pv$$

$$p(-u) = +pu$$

Setze man $v = -u$

$$p(u+2\omega) = pu$$

$$p(u+2\omega) = pu$$

und pu ist doppelt periodisch.

Nun war

$$\frac{\sigma'}{\sigma}(u+2\omega) - \frac{\sigma'}{\sigma}u = g'(u);$$

A

daher

$$-p(u+2\omega) + pu = g''(u) = 0$$

$$g'u = \text{const}$$

$$gu = \text{linear Fcn. in } u.$$

$$\log \sigma(u+2\omega) - \log \sigma(u) = gu$$

$$= \log \frac{\sigma(u+2\omega)}{\sigma u}$$

$$\frac{\sigma(u+2\omega)}{\sigma u} = e^{gu} = Ce^{cu}$$

B

$$u=0$$

$$2 \frac{\sigma' \omega}{\sigma \omega} = C \quad \frac{\sigma' \omega}{\sigma \omega} = \eta$$

$$\frac{\sigma' \omega'}{\sigma \omega'} = \eta'$$

In B setze man $u = -\omega$

$$\left(\frac{\sigma'}{\sigma}(\omega) - \frac{\sigma'}{\sigma}(-\omega) \right) = \left(\frac{\sigma'}{\sigma}(\omega) + \frac{\sigma'}{\sigma}(\omega) \right) = 2 \frac{\sigma' \omega}{\sigma \omega} = C = 2\eta$$

$$\frac{\sigma(\omega)}{\sigma(-\omega)} = -1 = C \cdot e^{-c\omega} = C \cdot e^{-2\eta\omega}$$

$$C = -e^{2\eta\omega}$$

Aus B

$$\sigma(u+2\omega) = -\sigma(u) \cdot e^{2\eta(u+\omega)}$$

$$\sigma(u+2\omega) = -\sigma u \cdot e^{2\eta(u+\omega)}$$

$$\sigma(u+2\omega') = -\sigma u \cdot e^{2\eta'(u+\omega')}$$

17 Mai
Dienstag

$$\varphi u = C \cdot e^{cu} \frac{\sigma(u-u_1)\sigma(u-u_2)\cdots\sigma(u-u_n)}{\sigma(u-v_1)\sigma(u-v_2)\cdots\sigma(u-v_n)}$$

ist eine dopp. per. Funct. wenn $c=0$ und
wenn $\sum u_\alpha = \sum v_\alpha \quad \alpha=1\cdots n.$

Denn wenn

$$\tau(u+2\omega-u_1) = -\sigma(u-u_1) e^{2\eta(u+\omega-u_1)}$$

so ist

$$\varphi(u+2\omega) = \varphi u \cdot e^{\sum_{\alpha=1}^n 2\eta(u-u_\alpha+\omega) - 2\eta(u-v_\alpha+\omega)}$$

und dies, da $\sum u_\alpha = \sum v_\alpha$ ist $= \varphi u e^0 = \varphi u$

$$\sigma(u+2\omega-u_1) = \dots$$

$$\varphi(u+2\omega) = \varphi u \quad \text{Q.E.D.}$$

Gibt es nur eine zweite F., mit denselben Null- und ∞ Stellen, ^{mit Ausschluß von einer drit.} so sei es

$$\varphi_1 u = C_1 e^{c_1 u} \frac{\sigma(u-u_1)\cdots\sigma(u-u_n)}{\sigma(u-v_1)\cdots\sigma(u-v_n)}$$

Man divid.

$$\frac{\varphi_1 u}{\varphi u} = \frac{C_1}{C} \frac{\sigma(u-u_n')}{\sigma(u-u_n)} e^{c u}$$

und da dies eingleidrig ist so ist es eine Constante, und φ & φ_1 unterscheiden sich nur et einem const. Fact.

Der allgemeinste Ausdruck für eine
doppelt-periodische Function ist dann

$$\varphi u = C \cdot e^{\frac{cu \sigma(u-u_1) \sigma(u-u_2) \dots \sigma(u-u_n)}{\sigma(u-v_1) \sigma(u-v_2) \dots \sigma(u-v_n)}}$$

Wir untersuchen jetzt ob zw. $\varphi u + v$ φu φv
eine algebr. Gl. besteht.

$$\varphi u - \varphi v = C \frac{\sigma(u-v) \sigma(u+v)}{\sigma u \sigma v}$$

Denn φ hat eine ~~Stelle~~ Stelle im Nullpunkt
die 2mal zu zählen ist, σu dagegen eine
 ∞ Stelle in σv die einfach zu zählen ist.

Für $u=v$ wird links = 0 und auch rechts.

Für $u=-v$ & $\varphi(-u) = +\varphi u$, wird l. & r. = 0.

Ander ∞ und 0 Stelle hat jeder Ausdr. u't:
sie stimmen überein bis auf eine Const. C.

$$\varphi'(u+\omega) = \varphi'(u-\omega) \quad u=0$$

$$\varphi'(\omega) = \varphi'(-\omega)$$

Da aber φ' eine ungerade Funct. ist muss

$$\varphi'\omega = 0$$

und $\varphi\omega$ hat eine Nullstelle bei $u=\pm\omega$

und auch eine 2τ bei $u=\pm\omega'$

$$\varphi(u) = C \frac{\sigma(u-\omega) \sigma(u-\omega') \sigma(u+\omega) \sigma(u+\omega')}{\sigma^2(u)}$$

Um C zu bestimmen, entwick. nach u

$$f'u = -2 \frac{1}{u^3} + \dots = C \frac{\sigma w \sigma w' \sigma(w+w')}{\sigma^3 u \sigma' w}$$

$$f'u = \frac{-2 \sigma(u-w) \sigma(u-w') \sigma(u+w+w')}{\sigma^3 u \sigma w \sigma w' \sigma(w+w')} - \frac{2 \sigma'(u+w) \sigma(u+w') \sigma(u+w+w')}{\sigma^3 u \sigma w \sigma w' \sigma(w+w')}.$$

$$f'u - f'v = \frac{\sigma(u-w) \sigma(v-w)}{\sigma^2 u \sigma' v}$$

$$\left(\frac{df'u}{du}\right)^2 = (f'u)^2 = \frac{4 \sigma(u-w) \sigma(u+w)}{\sigma^2 u \sigma' w} \cdot \frac{\sigma(u-w') \sigma(u+w')}{\sigma^2 u \sigma' w'} \cdot \frac{\sigma(u-w-w') \sigma(u+w+w')}{\sigma^2 u \sigma^2(w+w')}.$$

$$\left(\frac{df'u}{du}\right)^2 = (f'u)^2 = 4(f'u - f'w)(f'u - f'w')(f'u - f'(w+w'))$$

= ganze Fu. 3ten Grades, mit den Wz.
 $f'u = w \quad u = w' \quad u = w+w'$

$$f'w = e_1, \quad f'w+w' = e_2, \quad f'w' = e_3$$

$$\left(\frac{ds}{du}\right)^2 = 4(s-e_1)(s-e_2)(s-e_3).$$

$$= 4(s^3 - s^2(e_1 + e_2 + e_3) + s(e_2 e_3 + e_3 e_1 + e_1 e_2) - e_1 e_2 e_3).$$

Und indem man $e_1 + e_2 + e_3 = 0$

$$4(e_2 e_3 + e_3 e_1 + e_1 e_2) = g_2$$

$$4(e_1 e_2 e_3) = g_3$$

$$\left(\frac{ds}{du}\right)^2 = 4s^3 - g_2 s - g_3$$

$$\left(\frac{ds}{du}\right)^2 = 4s^3 - g_2 s - g_3 = A^2$$

$$\frac{d}{2du} \left(\frac{ds}{du}\right)^2 = 6s^2 - \frac{1}{2}g_2$$

Jede ungerade Ableitung von $\frac{ds}{du}$ ausser der ersten ist eine ganze Fu. von s und Ableitungen niedrigeren Grades.

$$\frac{ds}{du} \cdot \frac{d^2s}{du^2} = 6s^3 + \frac{1}{2}g_2$$

$$\frac{d^{2n} s}{du^{2n}} = g_n(s)$$

$$\frac{d^{2n+1} s}{du^{2n+1}} = g_n'(s) \frac{ds}{du}$$

$$\frac{d^{2n+2} s}{du^{2n+2}} = g_n''(s) \left(\frac{ds}{du}\right)^2 + g_n' \frac{d^2s}{du^2} = g_{n+1}(s).$$

$$\frac{d^2s}{du^2} = \frac{6s^2 - \frac{1}{2}g_2}{A}$$

$$\frac{d^3s}{du^3} = \frac{12sA - 6s^2A'}{A^2}$$

$$\frac{d^4s}{du^4} = \frac{(12A + 12sA' - 12sA' - 6s^2A'')A^2 - 24sA^2A' + 12s^3A'^2}{A^3}$$

sondern ist eine ganze Fu.

18. Mai

Es ist nun zu zeigen dass $\left(\frac{ds}{du}\right)^2$ eine
Add. Form besitzt.

Dazu ist es nur nachzuweisen dass jede
dopp. per. Fv. ausdrückbar ist als $f(u) f(v)$
und zweitens dann wird $\phi(u+v) = R(f(u) f(v) f(u) f(v))$.

Jede dopp. per. Fv. ist darstellbar durch

$$\phi(u) = \frac{\sigma(u-u_1)\sigma(u-u_2)\dots}{\sigma(u-v_1)\sigma(u-v_2)\dots}$$

Diese ist rat. ausdrückbar als $f(u) f(v)$, denn

$$\frac{\sigma(u+v)\sigma(u-v)}{\sigma^2 u \sigma^2 v} = f(u) - f(v)$$

Dies nach u differenziert gibt

$$\frac{(\sigma'(u+v)\sigma(u-v) + \sigma(u+v)\sigma'(u-v))\sigma^2 u \sigma^2 v - \sigma(u+v)\sigma(u-v)\{2\sigma u \sigma' u \sigma^2 v + 2\sigma v \sigma' v \sigma^2 u\}}{\sigma^4 u \sigma^4 v}$$

$$= \frac{\sigma'(u+v)\sigma(u-v) + \sigma(u+v)\sigma'(u-v)}{\sigma^2 u \sigma^2 v} - \frac{2\sigma(u+v)\sigma(u-v)\sigma' u}{\sigma^2 u} = f'(u).$$

Logarith. diff. gibt es

$$\frac{(\sigma'(u+v)\sigma(u-v) + \sigma(u+v)\sigma'(u-v))\sigma^2 u \sigma^2 v - \sigma(u+v)\sigma(u-v)2\sigma u \sigma' u \sigma^2 v}{\sigma^4 u \sigma^4 v}$$

$$= -\frac{2\sigma' u}{\sigma u} + \frac{\sigma'(u+v)\sigma(u-v) + \sigma(u+v)\sigma'(u-v)}{\sigma(u+v)\sigma(u-v)}$$

$$= \frac{\sigma' u+v}{\sigma(u+v)} + \frac{\sigma'(u-v)}{\sigma(u-v)} - \frac{2\sigma' u}{\sigma u} = \frac{f'(u)}{f(u) - f(v)}$$

Und nach v diff. ergibt sich ähnlich

$$\frac{\sigma'(u+v)}{\sigma(u+v)} - \frac{\sigma'(u-v)}{\sigma(u-v)} - 2 \frac{\sigma'v}{\sigma v} = - \frac{\wp'v}{\wp u - \wp v} \quad (*)$$

Dies noch mal nach v diff.

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial v^2} &= \frac{\sigma''(u+v)}{\sigma(u+v)} - \left(\frac{\sigma'(u+v)}{\sigma(u+v)} \right)^2 + \frac{\sigma''(u-v)}{\sigma(u-v)} - \left(\frac{\sigma'(u-v)}{\sigma(u-v)} \right)^2 - 2 \left\{ \frac{\sigma''v}{\sigma v} - \left(\frac{\sigma'v}{\sigma v} \right)^2 \right\} \\ &= - \frac{\wp''v(\wp u - \wp v) - \wp'v^2}{(\wp u - \wp v)^2} \end{aligned}$$

Die zweite logarith. Ableitung des (*) gibt

$$\text{Da } \frac{\partial^2}{\partial^2} \log \sigma = \wp u.$$

$$\wp(u+v) - \wp(u-v) = 2\wp v - \frac{\wp''v(\wp u - \wp v) - \wp'v^2}{(\wp u - \wp v)\wp'v}$$

$$\begin{cases} \wp(u+v) - \wp(u-v) = 2\wp v - \frac{\wp''v}{\wp'v} + \frac{\wp'v}{\wp u - \wp v} \\ \wp(u+v) + \wp(u-v) = 2\wp u + \frac{\wp'u}{\wp u - \wp v} + \frac{\wp''u}{\wp u} \end{cases}$$

$$\left(\frac{ds}{du} \right)^2 = 4(\wp u)^3 - g_2 \wp u - g_3.$$

Durch Addition

$$2\wp(u+v) = 2\wp u + 2\wp v + \frac{\wp'u}{\wp u - \wp v} + \frac{\wp'v}{\wp u - \wp v} + \frac{\wp''u}{\wp u} - \frac{\wp''v}{\wp v}$$

$$-6\wp u^3 + g_2 \wp u^2 + 6\wp v \wp u^2 - \frac{1}{2}g_2 \wp u \wp v = ()^2$$

"

$$= 6\wp v \wp u^2 + 2\wp v^2 \wp u - \frac{1}{2}g_2(\wp u + \wp v) - g_3$$

Dies gilt aber in die Abh. wenn $u = v$.

$$p(u+v) = \frac{s + s_1(s+s_1) - \frac{1}{2}g_2(s+s_1) - g_3 - s's_1'}{2(s-s_1)^2}$$

20.

$$p(u-v) = \frac{s + s_1(s+s_1) - \frac{1}{2}g_2(s+s_1) - g_3 + s's_1'}{2(s-s_1)^2}$$

Allgem.

$$R(x) = Ax^4 + 4Bx^3 + 6Cx^2 + 4B'x + A'$$

$$R(x_1) = Ax_1^4 +$$

$$R(xx_1) = Ax_1^2x^2 + 2Bxx_1(x+x_1) + 6Cxx_1 + 2B'(xx_1) + A'$$

$$\frac{\partial R(xx_1)}{\partial x} = \frac{1}{2} \frac{d}{dx} R(x)$$

$$R^2(xx_1) - R_x \cdot R_{x_1} = 0 \quad x=x_1$$

Führt das const. Gld. so ist diese letz. Fu. d. $x-x_1$ theilbar.

$$R^2(xx_1) - R_x \cdot R_{x_1} = (x-x_1) \bar{R}(xx_1)$$

$$\begin{aligned} \bar{R}(xx_1) &= (B^2 - AB')x^2x_1^2 + (BC - AB')xx_1(x-x_1) \\ &\quad + \frac{1}{2}(C' - AA')(xx_1)^2 + 2(C' - BB') + (B'C - A'B)(x+x_1) \\ &\quad - B'^2 - B'C \end{aligned}$$

Bei unren. Gld. $4s^2 - g_2s - g_3$ ist $A=0$ ($=0$ $B=1$)
 $B' = -\frac{1}{4}g_2$ $A' = -g_3$.

$$\bar{R}(ss_1) = s^2s_1^2 - \frac{1}{2}g_2ss_1 + g_3(s+s_1) + \frac{1}{4}g_2^2$$

$$= (ss_1 + \frac{1}{4}g_2)^2 + g_3(s+s_1)$$

$$p(u-v) \cdot p(u+v) = \frac{(\bar{R}(ss_1))^2 - R_s \cdot R_{s_1}}{4(s-s_1)^2}$$

welches analog. ist mit

$$f(u+v) = \frac{(ss_1 - \frac{1}{2}g_2)^2 + g_3(s+s_1)}{4ss_1(s+s_1) - g_2(s+s_1) - 2g_3 + 2ss_1'}$$

$$f(2u) = \frac{(s^2 - \frac{1}{2}g_2)^2 + 2g_3s}{4s^3 - g_2s - g_3}$$

$$(f(u) - f(v)) = \frac{\sigma(u+v) \sigma(u-v)}{\sigma^2 u \sigma^2 v.}$$

Eine ellipt. F. mit den 3 Nullstellen
 $u, u_1 + u_2, -u_1 - u_2$ ist

$$(M) \quad \frac{\sigma(u+u_1+u_2)\sigma(u-u_1)\sigma(u-u_2)}{\sigma u^3}$$

und sie hat eine ∞ Stelle bei $u=0$ dritten Grads.
 Bilden wir nun

$$A + B f u + C f' u$$

$$\text{wo } f u = \frac{1}{u^2} + \eta(u) \quad f' u = -\frac{2}{u^3} + \eta'(u),$$

so hat auch diese F. eine ∞ Stelle 3ten Grads.

$$(A + B f u + C f' u) (A + B f u_1 + C f' u_1) (A + B f u_2 + C f' u_2)$$

Die Determin.

$$C \begin{vmatrix} 1 & f u & f' u \\ 1 & f u_1 & f' u_1 \\ 1 & f u_2 & f' u_2 \end{vmatrix}$$

hat dieselben 0 und ∞ Stellen wie (M)
 und ist daher mit der bis auf eine Const. identisch

$$\begin{vmatrix} 1 & p u & p' u \\ 1 & p u_1 & p' u_1 \\ 1 & p u_2 & p' u_2 \end{vmatrix} = (p u_1 \cdot p' u_2 - p' u_1 \cdot p u_2) + (p u_2 \cdot p' u_1 + p' u_2 \cdot p u) + (p u \cdot p' u_1 - p' u \cdot p u_1)$$

$$\begin{vmatrix} 1 & p u \\ 1 & p u_1 \end{vmatrix} = p u_1 - p u = \frac{\sigma(u+u_1) \cdot \sigma(u-u_1)}{\sigma^2 u \sigma^2 u_1}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & p u & p' u \\ 1 & p u_1 & p' u_1 \\ 1 & p u_2 & p' u_2 \end{vmatrix} = p' u \begin{vmatrix} 1 & p u_1 \\ 1 & p u_2 \end{vmatrix} - p' u_1 \begin{vmatrix} 1 & p u \\ 1 & p u_2 \end{vmatrix} + p' u_2 \begin{vmatrix} 1 & p u \\ 1 & p u_1 \end{vmatrix}$$

$$p u = p u$$

Im Allgemeinen

$$\frac{\sigma(u+u_1) \sigma(u-u_1) \sigma(u+u_2) \sigma(u-u_2) \cdots \sigma(u+u_n) \sigma(u-u_n)}{\sigma^{n+1} u \sigma^{n+1} u_1 \cdots \sigma^{n+1} u_n} =$$

$$= A_0 + A_1 p u + A_2 p' u + \cdots + A_n p^{(n)} u,$$

und $p u$ ist linear d. $p u$ & ihren Ableitungen ausdrückbar.

Wenn mehrere u_i einander gl. sind, so hat $p u$ die Form $p = \frac{\sigma^{r_1}(u \cdot u_1) \sigma^{r_2}(u \cdot u_2) \cdots \sigma^{r_n}(u \cdot u_n) \sigma(u \cdot u_{n+1})}{\sigma^{n+1} u}$

$$p u = \frac{1}{u^2} + p(u)$$

$$p^{(\mu)} u = (-1)^{\mu-1} \mu! u^{-(\mu+1)} + p(u).$$

und hat also wie $p u$ eine ∞ Stelle bei $u=0$.

$$p = \frac{g_1(p u) + g_2(p u) p' u}{g_2(p u) + g_3(p u) p' u} = R(p u, p' u)$$

Es ist dann aus

$$\varphi u = R(\varphi u \varphi' u)$$

zu beweisen dass

$$\varphi u \text{ und } \varphi' u = R(\varphi u \varphi' u).$$

Dazu nehme man ein festes u .

$$x = \varphi(u)$$

$$y = \varphi'(u)$$

so dass $x = \text{algeb. Fu.}(y)$.

und statt x setze man

$$(a) \quad x = R(st) \quad (b) \quad t^2 = 4s^3 - g_2s - s_3$$

$$(c) \quad y = R_1(st)$$

so ist aus (a) (b), (c) das st und t zu bestimmen. Wir fragen zunächst ob es mehrere Wertepaare s, t , gibt welche (a) u (c) befriedigen.

Gibt es nur eines, so ist

$$s = R(x)$$

$$t = R(x)$$

Gibt es 2 Wertepaare

$$s_1 = \varphi u, \quad t_1 = \varphi'(u)$$

$$s_2 = \varphi u, \quad t_2 = \varphi'(u)$$

so kann man sich einen Argumentwerth u_2 finden dass

$$s_2 = \varphi u_2 \quad t_2 = -\varphi' u_2$$

Dazu nehme man $u_2 = \text{conjugiert Werth von } u_1$.

$$\text{so wird } s_1 = s_2 \geq 0 \quad t_1 = t_2 \geq 0.$$

Man setze $\varphi u'' = R(\varphi u'' \varphi' u'') = \varphi u'$
 (B) $\varphi' u'' = \varphi' u'$

Wenn also $x = R(st)$ $y = R_1(st)$
 für 2 Wertepaare befriedigt werden, so
 bestehen (B)

Wenn u, u_2 nicht conjugiert sind
 so ist $u_2 - u_1$ eine Periode. und

$$s_1 = s_2 \quad t_1 = t_2.$$

und es besteht

$$g(\varphi u \varphi' u) = 0$$

Daraus können wir die Abl. bilden

$$g_1(\varphi' u \varphi'' u) = 0$$

und aus g & g₁

$$\varphi'' u = - \frac{g_1 \varphi' u}{g_2 \varphi u}$$

Was die Ausdruckstrennung der höheren
 Abl. d. $\varphi u \varphi' u$ an betrifft, so ist

$$\varphi^{(v+1)} u = \frac{G_{v+1} u}{G_2^{2v-1} u}$$

denen

$$\varphi^{v+2} u = \frac{G_{v+1}' \cdot \varphi' u + G_{v+1}'' \cdot \varphi'' u}{G_2^{2v-1}} - 2v \frac{G_{v+1}}{G_2^{2v}}$$

da

$$(\cdot (G_2^{(v)} \varphi' u + G_2^{(v+1)} \varphi''))$$

$$\varphi^{v+2} u = \frac{G_{v+2}}{G_2^{2v+1}}$$

Q.E.D.

Beschränken wir uns auf endl. Werthe von u so ist

$$\varphi(u_1+h) = \varphi u_1 + \frac{h}{1} \varphi' u_1 + \dots$$

$$\varphi(u_2+h) = \varphi u_2 + \frac{h}{1} \varphi' u_2 + \dots$$

$$\varphi(u_1+h) = \varphi(u_2+h)$$

$$\varphi(h) = \varphi(h+u_2-u_1)$$

für jedes h . Das heisst aber u_2-u_1 ist eine Periode da die Gl. allgemein gilt.

$$(1) \quad x = R(st)$$

$$(2) \quad y = R_1(st)$$

$$(3) \quad x = \frac{L+Mt}{N}$$

$$(4) \quad y = \frac{L'+M't}{N'}$$

Es muss dann s auch dem Gl. genügen

$$(5) \quad (Nx-L)^2 - M^2(4s^2 - g_2s - g_3) = 0$$

$$(6) \quad (N'y-L')^2 - M'^2(4s^2 - g_2s - g_3) = 0$$

wo $4s^2 - g_2s - g_3 = t^2$ steht. $= \left(\frac{ds}{du}\right)^2$

Man nehme ein gewisses s und bestim. aus (1)

das t , und setze diesen Werth in (2) ein.

Dies $t = \sqrt{4s^2 - g_2s - g_3}$ muss eindeutig bestimmt

sein. Denn sonst gäbe es aus 3 & 4

je 2 Werthe für x und y , welches unmögl. ist da x u. y = Rat. für ein s u. t .

$$\varphi u = R(\varphi)$$

$$\varphi' u = R_1(\varphi')$$

$$\varphi(u+v) = \varphi \varphi u \varphi v = R(\varphi u \varphi v \varphi' u \varphi' v)$$

$$\Phi(u, v) = R(\varphi u, \varphi v, \varphi u, \varphi v)$$

und es giebt eindeutige F_u mit dem
Add. Theorem. : jede solche F_u ist entweder
einfach- oder doppelt-periodisch.

Es giebt in der That ∞ viele einfache
periodische F_u . z.B. nehme man

$$\cos\left(\frac{u\pi}{\omega}\right) \quad \sin\left(\frac{u\pi}{\omega}\right)$$

und bilde daraus eindeut. F_u .

$$F\left(\cos\frac{u\pi}{\omega}\right)$$

so hat sie die Eigensch. der Periodicität
und verhält sich im Endl. wie eine Rat. F_u .
Wir bilden

$$F\cos\frac{u\pi}{\omega} + \sin F\cos\frac{u\pi}{\omega} = \varphi u.$$

eine F_u mit der Per. 2ω . Soll nun dies
ein Add. Th. besitzen so muss $F = \text{rat. } F_u$?
Mindestens hier wollen wir nur rat. F_u betrachten.

Wir theilen φ in 2 Theile, nämlich
in einen geraden Theil $\varphi_1 u = \frac{1}{2}(\varphi u + \varphi(-u))$

in einen ungeraden " $\varphi_2 u = \frac{1}{2}(\varphi u - \varphi(-u))$

$$\varphi u = \varphi_1 u + \varphi_2 u.$$

$$\varphi(u) = F\left(\cos\frac{u\pi}{\omega}\right)$$

Man setzt

$$x = \cos\frac{u\pi}{\omega}$$

und bilde $F(x)$ auf folgende Weise

x ist ident. für $u, u+2v\omega, \dots$

Daher $F(x)$ ist auch eindeutig.

aber $u = \infty$ mehrdeut. Punkt von F .

24. Mai.

$21-40$

$$h = -\frac{\pi}{\omega} \sin\left(\frac{2\omega_0 \pi}{\omega}\right) v - \left(\frac{\pi}{\omega}\right)^2 \frac{1}{2} \cos\left(\frac{2\omega_0 \pi}{\omega}\right) v^2 + \dots$$

no prob.

Sei $\frac{u_0 T}{w} \leq 0$.

$$h = \psi(r)$$
$$v = \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx}$$
$$\sin \frac{2\pi T}{\omega} = 0$$

$L = \frac{1}{2} \rho \int_{-L}^L \dot{y}^2 dx$

$$v^2 = \frac{1}{2} \dot{\phi}^2$$
$$u. = u \cdot w$$

$$\varphi_1(vu - v) = \varphi_1(u_0 - v) = \varphi_1(u_0 + v)$$

$$\varphi_i(2vw + v) = \varphi_i(v) = \varphi_i(-v).$$

statt v v-vw schneid

η_1 ist eine grade Fu.

There can't be ~~left~~, so it

$\cos i$ / ausdrücken.

rat. ausdrücken.

Breitet dann φu ein add. Thm und eine einfache Periode so ist

$$\varphi u = \varphi_1 u + \varphi_2 u$$

$$\varphi - u = \varphi_1 u - \varphi_2 u$$

und φ_1, φ_2 haben dieselben Eigenschaften wie φ . Es behaupte dann

$$G_0(\varphi u \varphi v) + G_0(\varphi(u) \varphi(v) \varphi(u+v)) = 0 \quad \text{Addat.}$$

Ist $\varphi(0) = \text{endl.}$

$$\overline{G}_0(\varphi u \varphi v) + (\overline{G}_0(\varphi u \varphi v))(\varphi u + v - \varphi 0) = 0$$

$$v = -u$$

$$\overline{G}_0(\varphi u \varphi -u) = 0$$

$$\varphi(u+v) = \frac{1}{2}(\varphi(u+v) + \varphi(-u+v))$$

$$G(\varphi u \varphi, u) = 0$$

gibt wenn man $u = v$ $u = u+v$ setzt.

$$f(\varphi u \varphi v \varphi_1 u \varphi_2 v \varphi u + v \varphi u - v) = 0$$

$$\varphi_2 u = \frac{1}{2} \varphi_1 u - \frac{1}{2}(\varphi - u)$$

$$\varphi_2 v = \frac{1}{2} \varphi v - \frac{1}{2}(\varphi - v)$$

$$\varphi_2(u+v) = \frac{1}{2} \varphi u + v + \frac{1}{2} \varphi(-u+v)$$

Jede Periode von φu ist zugleich eine Per. von φ_1, φ_2 .

Wir haben dann

$$G(\varphi_1 u \varphi_2(u+2v+w)) = 0$$

$$= \varphi_1 u + \varphi_1(u+2v) + \varphi_2 u + 4v + \dots$$

Da aber die G eine algeb. Gl. ist so
hat sie eine endl. Anzahl in W_2 , und
aus $\varphi(u+2v\omega) \quad v=1, \dots, n-1$
müssen mindestens 2 einander gl. sein.

$$\varphi(u_1) = \varphi(u+2\omega)$$

und 2ω bildet eine Periode, oder $2d\omega$.

25.

$$\varphi u = \varphi_1 u + \varphi_2 u.$$

$$\varphi_1 = F\left(\cos \frac{u\pi}{\omega}\right) \quad \varphi_2 = \sin\left(\frac{u\pi}{\omega}\right) \cdot F_1\left(\cos \frac{u\pi}{\omega}\right).$$

φ_1 und φ_2 lassen sich so darstellen, dass
 F und F_1 eindeutige Funkt. sind.

Nehmen wir für φ das Add. Theorem, und
dass sie einfach periodisch sein soll, so
wird auch φ_1, φ_2 mindestens eine einfache
Periode besitzen.

$$\cos \frac{u\pi}{\omega} = x$$

Nehmen wir an $F(x) = b$ = rat. aber nicht transsc. F_1
so wird diese Gl. bestehen für beliebig viele
Werthe des x .

Die Gl.

$$G_1(\varphi_1(u+v), \varphi_1 u, \varphi_1 v) = 0$$

sei irrf. $\varphi_1(u+v)$ vom Grade m , mit den
Wurzeln $\varphi_1(a_1) = 0, \dots, \varphi_1(a_m)$, so kann man
 b auf ∞ viele Weise wählen so dass

$$\varphi_1(a_1) = \varphi_1(a_2) = \dots = \varphi_1(a_m) = b$$

$$\varphi_1(x) = \mathcal{F}(x) = \mathcal{F}\left(\cos \frac{u\pi}{\omega}\right).$$

Aus $\cos \frac{u_v \pi}{\omega} = a_v$ da $a_v < a_{v+1}$

es ist auch

$$\cos \frac{u_v \pi}{\omega} < \cos \frac{u_{v+1} \pi}{\omega}$$

$$\cos \frac{u_v \pi}{\omega} = \cos \frac{(u_v + 2\omega) \pi}{\omega} < \cos \frac{u_{v+1} \pi}{\omega}$$

$$\varphi_1(u_1 + u_2) = \varphi_1(u + u_\mu) \quad \text{und wenn man}$$

$$\varphi_1(u_1 + u_2 - u_\mu) = \varphi_1(u)$$

so hat φ auch eine 2te Periode $u_2 - u_\mu$, welche kein Vielfaches von 2ω ist. Dann muss aber nach einem früher gegl. Satz

$$(u_2 - u_\mu) : 2\omega = \text{imag. sein}$$

Wenn denn \mathcal{F} eine transcendente Fk ist, so hat sie 2 Perioden. Nach der Voraussetzung aber hat sie nur eine Periode, daher muss sie bloss eine rationale Funch. sein.

Wenn also eine einfach periodische Funch. ein Add.th. besitzt, so ist sie rational & dem cosinus ausdrückbar.

Was φ_2 an betrifft, so lässt sie sich darstellen d. φ_1 selbst.

$$(\varphi_2 u)^2 = \text{rat. Funch.} \cdot \cos \frac{u\pi}{\omega} = \text{rat. } \mathcal{F}(x) R(x).$$

$$R(x) = \frac{g_1(x)}{g_2(x)}.$$

Wenn $g_2 x = 0$, so ist diese Wurzel doppelt zu zählen.

$(g_0 x)^2 \cdot \phi_2^2 = g(x) \cdot g_0(x) = (x-x_1)^{2_1} (x-x_2)^{2_2} \dots$
 Es muss $\frac{g_0 x}{u}$ eine eindent. F. von u sein,
 dazu muss jeder Fact $(x-x_{\mu})$ in gerader
 Potenz vorkommen.

$$\phi_2 = \frac{1}{g_0(x)} \cdot C' (x-x_1)^{\frac{2_1}{2}} (x-x_2)^{\frac{2_2}{2}} \dots$$

und da ϕ_2 eine eindentige F. sein soll
 so muss $\frac{2_{\mu}}{2}$ eine ganze Zahl sein.

Wir nehmen

$$\cos \frac{u\pi}{w} = \cos \frac{u_1\pi}{w}$$

wo $u_1 \in v w$, und entwick. nach Pot von
 $u-u_1$

$$-\frac{\pi}{w} \sin\left(\frac{u_1\pi}{w}\right)(u-u_1) + \dots$$

$$\cos \frac{u_1\pi}{w} = \chi, \quad \cos \frac{u\pi}{w} = \chi.$$

Weil $g_0^2 \cdot \phi_2^2$ gerade in u ist so muss
 für jeden Factor $u-u_1$ auch der Fact
 $u+u_1$ vorkommen.

$$\cos \frac{u\pi}{w} = \frac{e^{\frac{u\pi i}{w}} + e^{-\frac{u\pi i}{w}}}{2}$$

$$\sin \frac{u\pi}{w} = \frac{e^{\frac{u\pi i}{w}} - e^{-\frac{u\pi i}{w}}}{2i}$$

$$\phi u = \phi_1 + \phi_2 = \Re\left(e^{\frac{u\pi i}{w}}\right).$$

wenn ϕu einfach period. ist und ein Add. H. hat.

$$W = 2vW + 2v'W'.$$

$$\Theta u = u \prod \left(1 - \frac{u}{w}\right) e^{\frac{u}{w} + \frac{1}{2} \frac{u^2}{w^2}}$$

$$w = -\infty \dots +\infty$$

27. Mai.

Wir denken alle Factoren wo u mit sich selber multiplicirt vorkommt ausgerechnet.

Sin $u\pi$ hat an $u=v$ eine einfache Nullstelle die einfachen Factoren sind also in der Formel enthalten

$$1 - \frac{u}{v}$$

wo $v = \text{ganze Zahl.}$

Um nun den exponential Factor für die Entwick von Sin $u\pi$ zu bestimmen, nehme man die Reihe von Zahlen m, \dots, m_n so dass

$$\sum \left(\frac{1}{m_i}\right)^{u_i}$$

ein converg. Reihe ist. Dies geschieht indem man $m_i = 3$ setzt.

Also $\sum \left(\frac{1}{n}\right)^u$ für $u=2$.

$$\sum \left(\frac{1}{2}\right)^2 e^{\frac{u}{2}} = 1 + \frac{u}{2} + \frac{u^2}{2 \cdot 2} + \dots = \sum \left(\frac{u}{2}\right)^{\frac{u}{2}}$$

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{u}{v}\right) e^{\frac{u}{v}} &= 1 + \frac{u}{v} + \frac{1}{2} \frac{u^2}{v^2} + \frac{1}{2 \cdot 3} \frac{u^3}{v^3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} \frac{u^4}{v^4} + \dots \\ &\quad - \frac{u}{v} - \frac{u^2}{v^2} - \frac{1}{2} \frac{u^3}{v^3} - \frac{1}{2 \cdot 3} \frac{u^4}{v^4} - \dots \\ &= 1 - \frac{u^2}{v^2} - \frac{2}{2 \cdot 3} \frac{u^3}{v^3} - \frac{3}{2 \cdot 3 \cdot 4} \frac{u^4}{v^4} \end{aligned}$$

$$1 - \frac{u^2}{v^2} - \frac{2}{2 \cdot 3} \frac{u^3}{v^3} - \frac{2}{2 \cdot 3 \cdot 4} \frac{u^4}{v^4} - \frac{4}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} \frac{u^5}{v^5}$$

$$= - \sum \frac{u^{n-1}}{n! v^n}$$

$$(A) \quad \sin(u\pi) = \pi u \cdot \prod' (1 - \frac{u}{v}) e^{\frac{u}{v}}$$

Der Ausdruck hat dann alle Nullstellen. Daher

$$\frac{\sin(u\pi)}{\pi u \pi} = \text{const} \times e^{g(u)}$$

wo für $u=0$ $g(u)$ endlich bleiben muss.
Um $g(u)$ zu bestimmen diff. man A und
da A die Fund. selbst.

$$\frac{\pi \cos(u\pi)}{\sin u\pi} = \frac{1}{u} + \sum' \left(\frac{1}{u-v} + \frac{1}{v} \right) + g'(u)$$

und wir haben zu zeigen dass dies eine periodische
Fund. ist mit der Periode 1

$$\psi u = \frac{1}{u} + \sum' \left(\frac{1}{u-v} + \frac{1}{v} \right)$$

$$\psi v = \frac{1}{v} + \sum' \left(\frac{1}{v-v} + \frac{1}{v} \right)$$

$$\psi u - \psi v = \frac{1}{u} - \frac{1}{v} + \sum' \left(\frac{1}{u-v} - \frac{1}{v-v} \right)$$

$$= \sum' \left(\frac{1}{u-v} - \frac{1}{v-v} \right) \text{ ohne Beschränkung}$$

Dieser Ausdruck ändert sich nicht wenn man statt
 v , $(v+1)$ schreibt

$$= \sum' \left(\frac{1}{u+1-v} - \frac{1}{v+1-v} \right) = \psi(u+1) - \psi(v+1)$$

$$\text{oder } \psi(u+1) - \psi(u) = \psi(v+1) - \psi(v)$$

das heißt so viel als, dass u ist beliebig
und die Fund. hat die Periode 1.

$$\sigma u = u \pi \left(1 - \frac{u}{w} \right) e^{\frac{u}{w} + \frac{1}{2} \frac{u^2}{w^2}}$$

30ten Mai 1881.

$$\log \sigma u = \log u + \sum \left(\log \left(1 - \frac{u}{w}\right) + \frac{u}{w} + \frac{1}{2} \frac{u^2}{w^2} \right).$$

Aber $\log \left(1 - \frac{u}{w}\right) = -\frac{u}{w} - \frac{1}{2} \frac{u^2}{w^2} - \frac{1}{3} \frac{u^3}{w^3} - \frac{1}{4} \frac{u^4}{w^4} - \frac{1}{5} \frac{u^5}{w^5} - \dots$
und

$$\sum \log \left(1 - \frac{u}{w}\right) = -\frac{u}{w} - \frac{1}{2} \frac{u^2}{w^2} - \frac{1}{3} \frac{u^3}{w^3} - \frac{1}{4} \frac{u^4}{w^4} - \dots$$

Da nun die \sum sich nur auf w bezieht, so lässt sich dies schreiben

$$\sum \log \left(1 - \frac{u}{w}\right) = -u \sum \frac{1}{w} - \frac{u^2}{2} \sum \frac{1}{w^2} - \frac{u^3}{3} \sum \frac{1}{w^3} - \frac{u^4}{4} \sum \frac{1}{w^4} - \dots$$

wo $w = 2^v w' = 2^v 2^{\nu'}$, $v = 1, 2, 3, \dots, \infty$

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{w} = 2 \sum_{1}^{+\infty} \frac{1}{w} = 2 \left\{ \frac{1}{2w+2w'} + \frac{1}{4w+4w'} + \dots \right\}$$

$$\frac{1}{w^2} = 2 \left\{ \frac{1}{(2w+2w')^2} + \frac{1}{(4w+4w')^2} + \dots \right\}$$

welche nicht sicher convergieren! Nicht klar.

Daher ist der zu jedem Gliede hinzugehörige Factor $\left(1 - \frac{u}{w}\right)$ da, damit in dem Ausdruck für $\log \sigma u$ die 2 ersten Glieder wegfallen, so dass

$$\log \sigma u = \log u + \sum \left(\frac{1}{3} \frac{u^3}{w^3} + \frac{1}{4} \frac{u^4}{w^4} + \dots \right)$$

$$\sin u = \frac{2\omega}{\pi} \sin u\pi \prod_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{u}{2n}\pi}{\sin n\pi} \cdot \frac{\sin(uT - v)\pi}{\sin u\pi}$$

$$\text{wo } \frac{2\omega}{\pi} = 2, \quad \frac{u}{2n} = \frac{u}{2}, \quad \dots$$

$$\sin u = \frac{2\omega}{\pi} e^{\frac{u^2}{2\pi}} \sin u\pi \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{u^2}{4n^2}\right)$$

und für den Sinus die analoge Formel:

$$\sin u\pi = u\pi \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{u^2}{n^2}\right).$$

$$\frac{\sin u\pi}{2\omega} = \frac{u\pi}{2\omega} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{u^2}{n^2}\right)$$

Hebe die Const. dieses Productes. Ist man

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 + x_n) = 1 + X_m$$

indem man bei dem letzten Gliede stehen bleibt, so convergirt X_m gegen sich X_m eine feste GröÙe nähert sie immer fort wachsendem m .

Die übrigen Glieder sind von der Form

$$(1 + x_n) = (1 + x_{n+m}) = 1 + X_{n+m}$$

Da nun X_m gegen sich X_m eine feste GröÙe nähert sie immer fort wachsendem m .

so wird X_m gegen sich X_m eine feste GröÙe nähert sie immer fort wachsendem m .

$$\lim_{m \rightarrow \infty} (1 + X_m) = 0$$

$$X_m = -1.$$

welches die Bedingung der Conver. des \prod ist. und die x_n müssen sich der GröÙe 0 nähern - die einzelnen Factoren also die GröÙe 1.

oder es muss sein

$$\frac{1}{n} \rightarrow 0$$

convergiren wenn $\prod (1 + x_n)$ conv. soll.

Der Grad. der Conver. hängt ab vom Grade
der Con. von ε . Kann man urtheilen
wie viel Glieder nöthig sind damit
 $R < \varepsilon$, so weiss man die direkte
Folge genügt damit T_n conv.

Der Ausdruck $ou = u_{11} \left(1 - \frac{u}{w}\right) e^{\frac{u}{w} + \frac{1}{2} \frac{u^2}{w^2}}$
ändert sich mit w wenn man w in $-w$ ersetzt
delt sich die Summation von $-w$ bis
 $+w$ erstreckt, ändert nicht wenn $\varepsilon = -\varepsilon$,
Daher kann man w immer so wählen
dass $R' > 0$ und $R < \varepsilon$.
Daraus bestimmt

$$\frac{w}{\varepsilon} = i T_1 + T_2 = \tau$$

$$h = e^{\tau \pi i} \cdot e^{-\tau \pi X} = e^{\tau \pi i}$$

$$|h| = e^{-\tau \pi X}$$

$$|e^{\tau \pi i}| = 1$$

$$2i \sin n\pi = \frac{e^{n\pi i} - e^{-n\pi i}}{i}$$

$$\frac{1}{\sin n\pi} = \frac{2i}{e^{n\pi i} - e^{-n\pi i}} = \frac{-2i h^{2n}}{1 - h^{2n}}$$

$$\sin^2 n\pi = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{h^{2n}}{(1 - h^{2n})^2}$$

welches wie eine Potenzreihe convergirt, und
in demselben Grad wie h^{2n}

$$2i \cdot \sin(n\tau - v)\pi = \frac{e^{(n\tau - v)\pi i} - e^{-(n\tau - v)\pi i}}{i}$$

$$= h^{u-1} z^{-1} - h^2 z = -z + 2h^2 (1 - h^{2u} z^{-2})$$

$$z = e^{\frac{2\pi i}{\omega} \tau} \quad v = \frac{u}{2\omega} \quad \tau = \frac{\omega'}{\omega} \quad h = e^{\tau \pi i}$$

$$h = e^{\frac{\omega'}{\omega} \pi i}$$

$$\sin \pi u = \frac{h^u - h^{-u}}{2i} = \frac{z^{\frac{u}{2}} - z^{-\frac{u}{2}}}{2i}$$

$$\frac{z^{\frac{u}{2}} (1 - h^{2u} z^{-2})}{1 - h^{2u}} = \frac{z^{\frac{u}{2}} (1 - h^{2u} z^{-2})}{1 - h^{2u}}$$

$$\frac{1 - h^{2u} z^{-2}}{1 - h^{2u}} = \frac{\sin((2\tau - v)\pi)}{\sin u\pi} e^{-v\pi i}$$

Das Π aus dem Ausdruck links entspricht der Corr. Haupt
ab von $\frac{2\pi i}{\omega}$

$$\sigma u = \frac{2\pi i}{\omega} e^{\frac{u\omega'}{2\omega}} \cdot \frac{z^{\frac{u}{2}}}{2i} \parallel \frac{1 - h^{2u} z^{-2}}{1 - h^{2u}} \parallel \frac{1 - h^{2u} z^{-2}}{1 - h^{2u}}$$

$$\text{Lsg. } \Pi(1 - h^{2u} z^2) = 0 \text{ für } z = \frac{1}{h^u}$$

$$\text{Lsg. für } e^{\frac{u}{2\omega} \pi i} = e^{-\frac{2\omega'}{2} \pi i} \quad \text{i.e. } u = -4\omega'$$

Die sigma Funktion kann auf 31 Weisen dargestellt werden. In der ersten Form $\Pi(1 - \frac{u}{\omega})$ hängt alles von u ab.

Zwei Periodenpaare sind congruent, wenn

alle Perioden, die aus dem einen Per. Paar
zusammengesetzt sind, sich auch aus dem
andern zusamm. setzen lassen.

Ein solches Per. Paar sei ω, ω'
ein zweites ω_1, ω'_1
so muss statt haben

$$\omega_1 = \alpha \omega + \alpha' \omega'$$

$$\omega'_1 = \beta \omega + \beta' \omega'$$

woraus

$$\omega = \frac{-\alpha' \omega'_1 - \omega_1 \beta'}{\alpha \beta' - \alpha' \beta}$$

$$\omega' = \frac{-\omega_1 \beta - \alpha \omega'_1}{\alpha \beta' - \alpha' \beta}$$

Damit nun die Coefficienten ganze Zahlen
sein muss $\alpha \beta' - \alpha' \beta = \pm 1$ sein, wie man
sieht aus

$$\omega = \frac{-\alpha'}{\alpha \beta' - \alpha' \beta} \cdot \omega'_1 - \frac{\beta'}{\alpha \beta' - \alpha' \beta} \omega_1$$

$$\omega' = \frac{-\alpha}{\alpha \beta' - \alpha' \beta} \omega'_1 - \frac{\beta}{\alpha \beta' - \alpha' \beta} \omega_1$$

Oder $\omega = \pm (\beta' \omega_1 - \alpha' \omega'_1)$

$$\omega' = \pm (-\beta \omega_1 + \alpha \omega'_1)$$

Es ist immer und dass $\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha' & \beta' \end{vmatrix} = \pm 1$

Was nun das Verhältniss $\frac{\omega'}{\omega}$ an betrifft
ist

$$\omega' = (\tau_1 + \tau_2 i) \omega$$

so ist

τ_2 positiv.

und

$$\omega'_1 = (\tau'_1 + \tau'_2 i) \omega_1$$

$$\omega_1 = (\alpha + \alpha'(\tau_1 + \tau_2 i)) \omega$$

$$\omega'_1 = (\beta + \beta'(\tau_1 + \tau_2 i)) \omega'$$

$$\frac{\omega_1}{\omega'_1} = \frac{(\alpha + \alpha'(\tau_1 + \tau_2 i)) \omega}{(\beta + \beta'(\tau_1 + \tau_2 i)) \omega'}$$

Der imag. Theil ist positiv wenn

$$\alpha\beta - \alpha'\beta' = +1$$

Es ist

$$W = 2v\omega + 2v'\omega'$$

$$W_1 = 2\mu\omega_1 + 2\mu'\omega'_1$$

und der Begriff alle ω istat genau
denselben Inhalt wie der Begriff alle ω_1
und daher

$$\left(1 - \frac{u}{w}\right) e^{\frac{u}{w} + \frac{1}{2} \frac{u^2}{w^2}} = \left(1 - \frac{u}{w_1}\right) e^{\frac{u}{w_1} + \frac{1}{2} \frac{u^2}{w_1^2}}$$

oder

$$\sigma(u\omega\omega') = \sigma(u\omega_1\omega'_1).$$

und $\sigma(u\omega\omega')$ ändert den Wert nicht, wenn
man statt $\omega \omega'$ irgend welche lineare
Funct derselben einführt deren Determinante
gleich ist der ~~positiven~~ ^{positiven} Einheit.

Die Formeln gehen auch wenn man setzt

$$u = \frac{u}{2\omega}$$

$$u_1 = \frac{u}{2\omega_1}$$

$$\tau = \frac{\omega'}{\omega}$$

$$\tau_1 = \frac{\omega'_1}{\omega_1}$$

$$h = e^{\tau\pi i}$$

$$h_1 = e^{\tau_1\pi i}$$

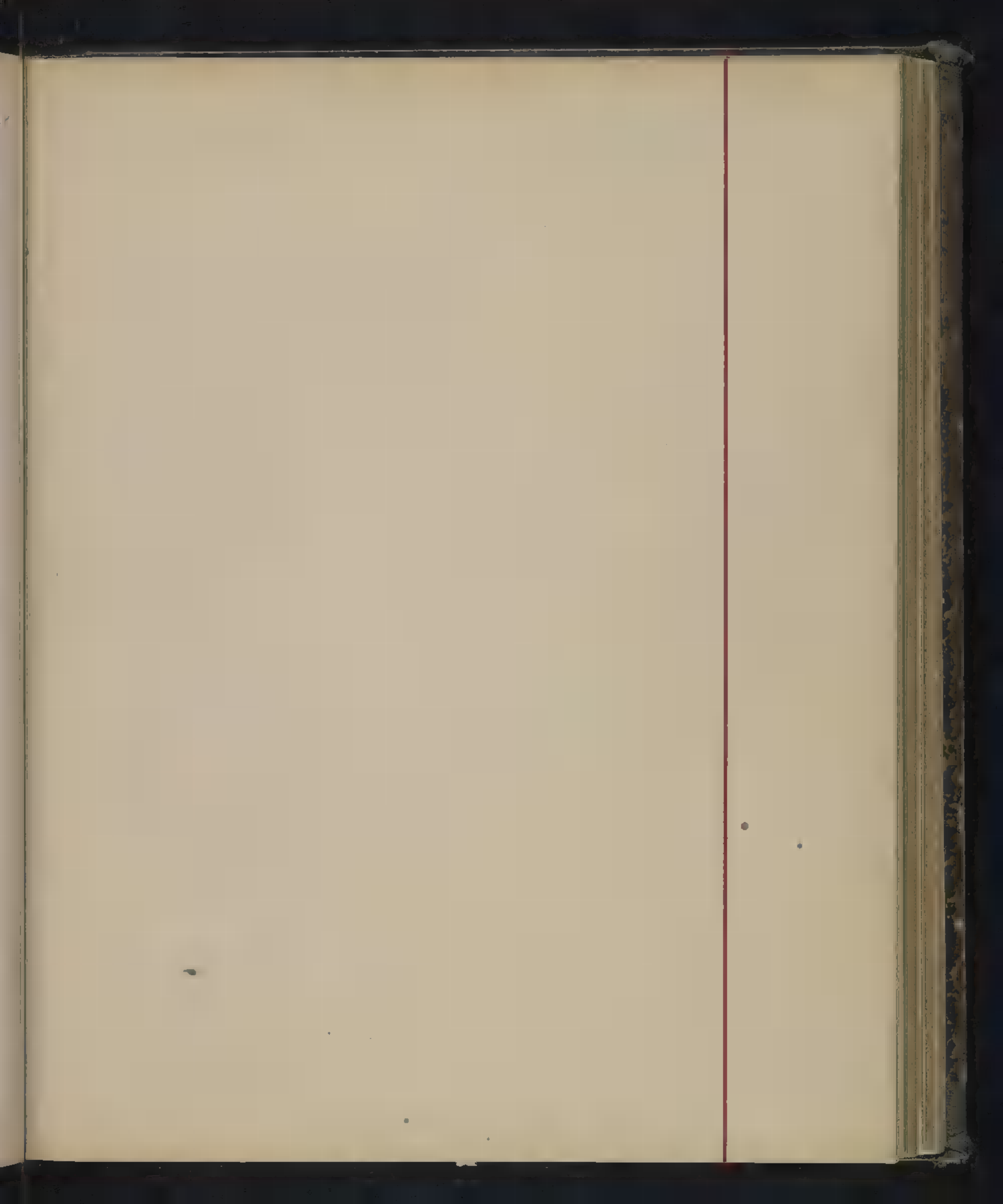
Es war

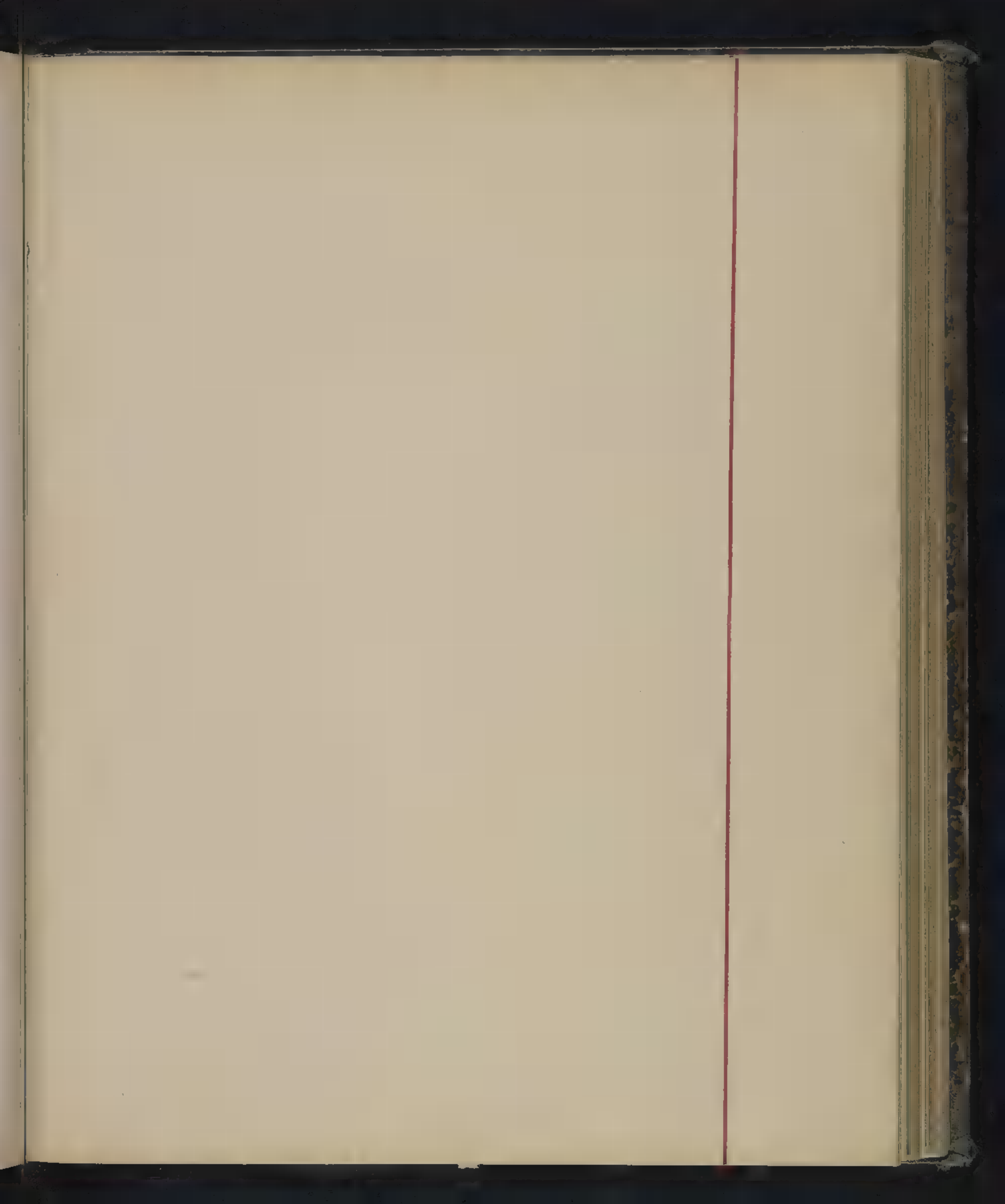
$$\eta = \frac{\sigma' \omega}{\sigma \omega}$$

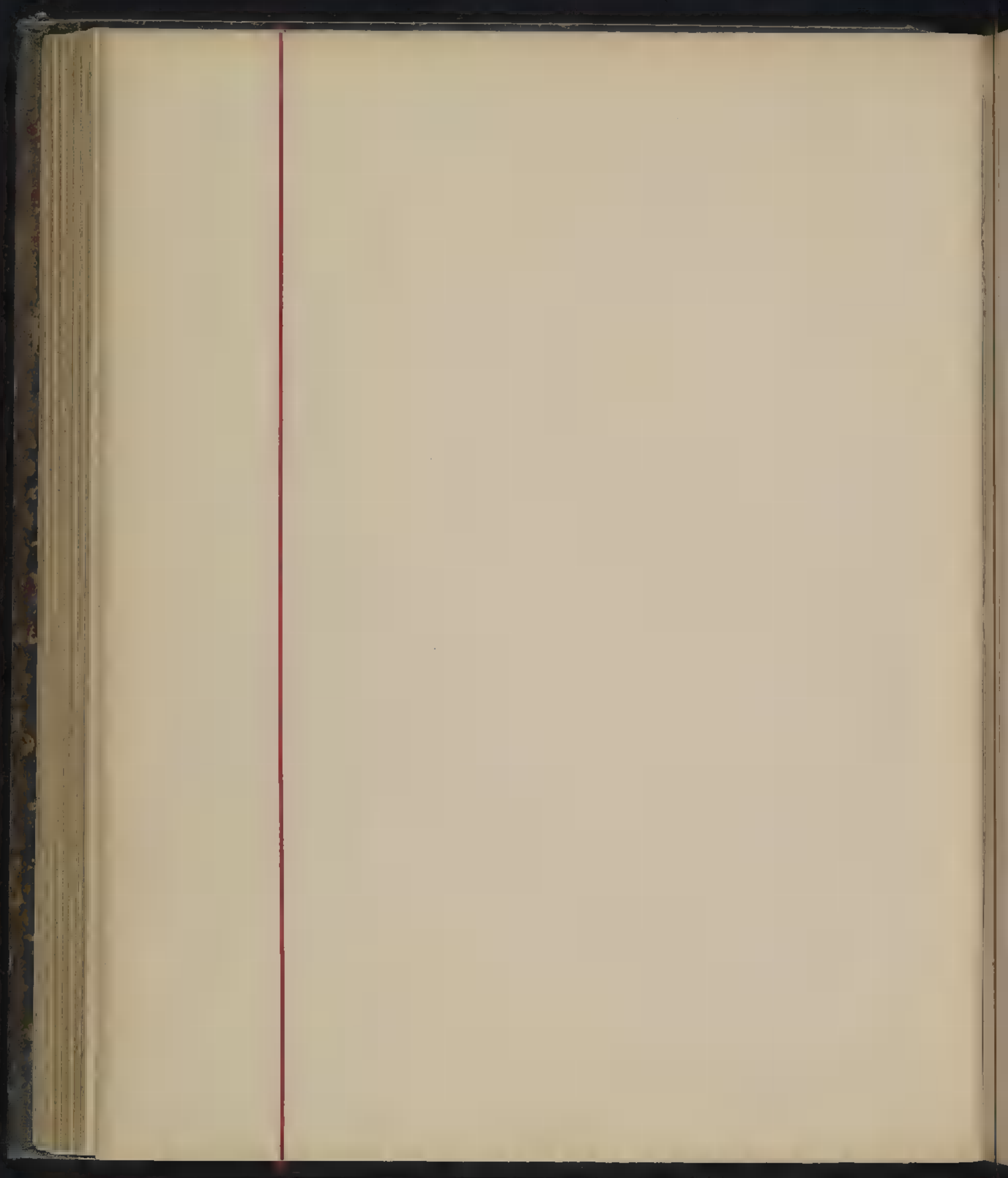
$$\eta_1 = \frac{\sigma' \omega_1}{\sigma \omega_1}$$

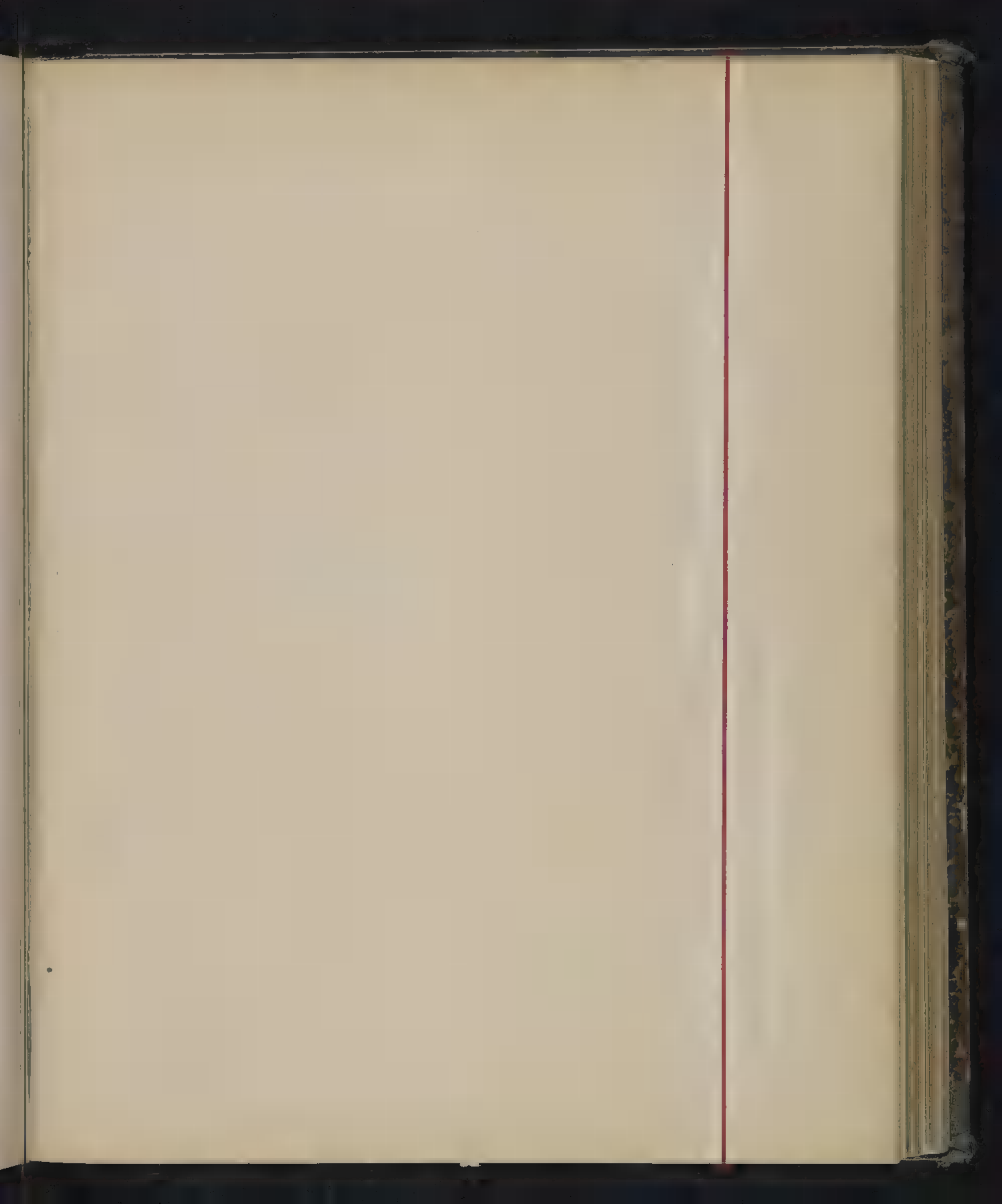
$$\frac{\sigma'(u + 2v\omega + 2v'\omega')}{\sigma(u + 2v\omega + 2v'\omega')} = 2v\eta + 2v'\eta' + \frac{\sigma'u}{\sigma u}$$

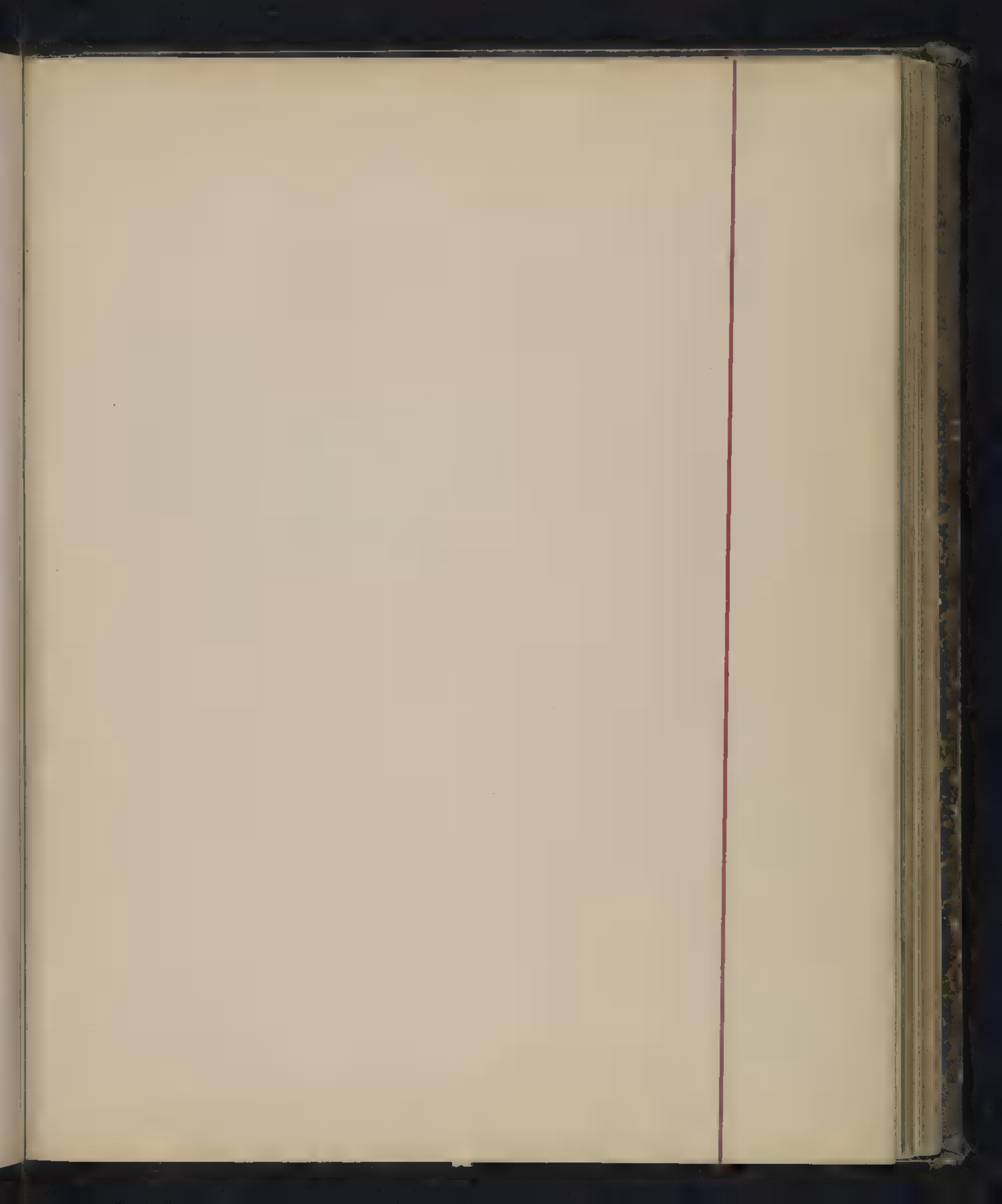
$$\frac{\sigma'(v\omega + v'\omega')}{\sigma(v\omega + v'\omega')} = v\eta + v'\eta'$$

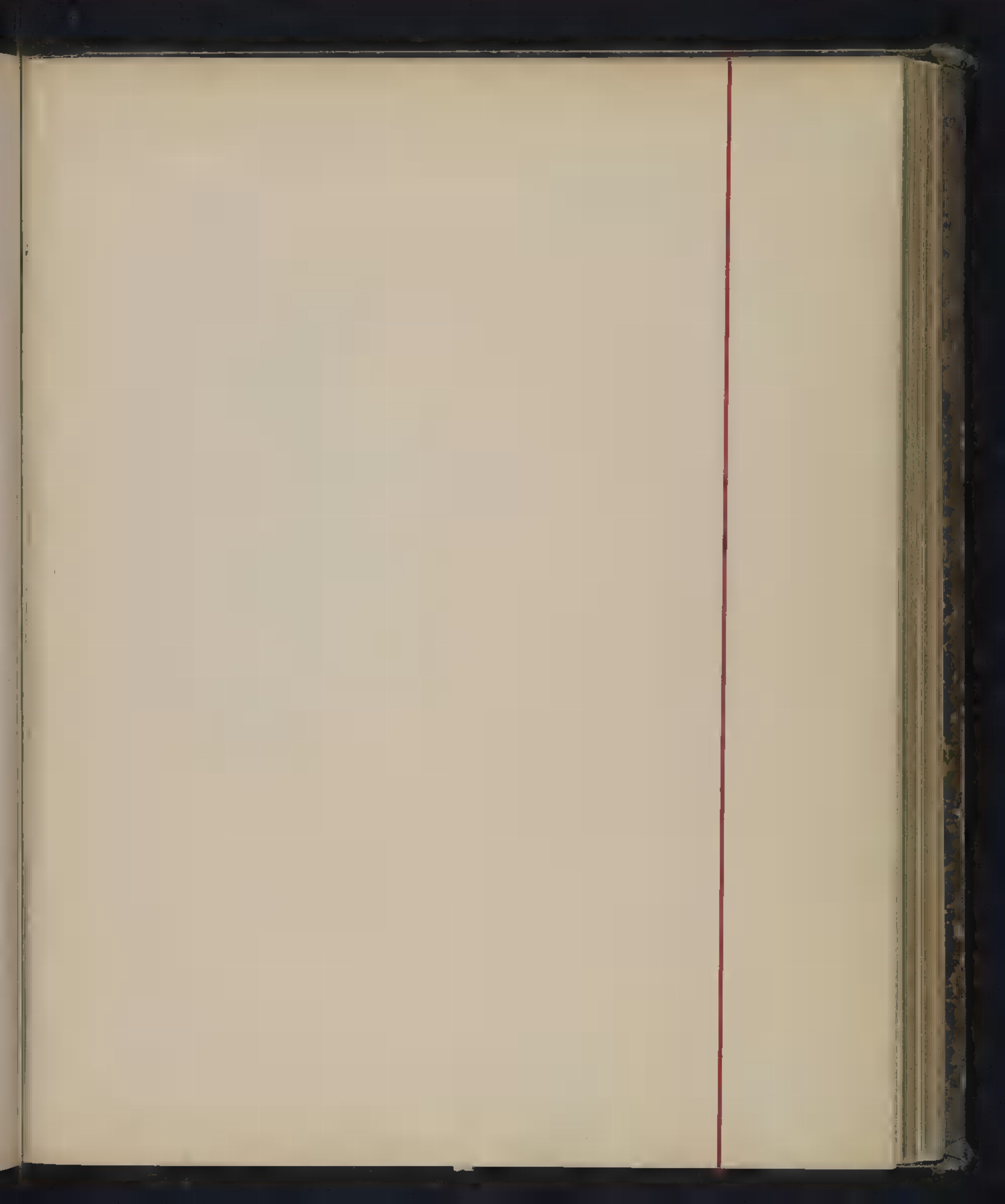


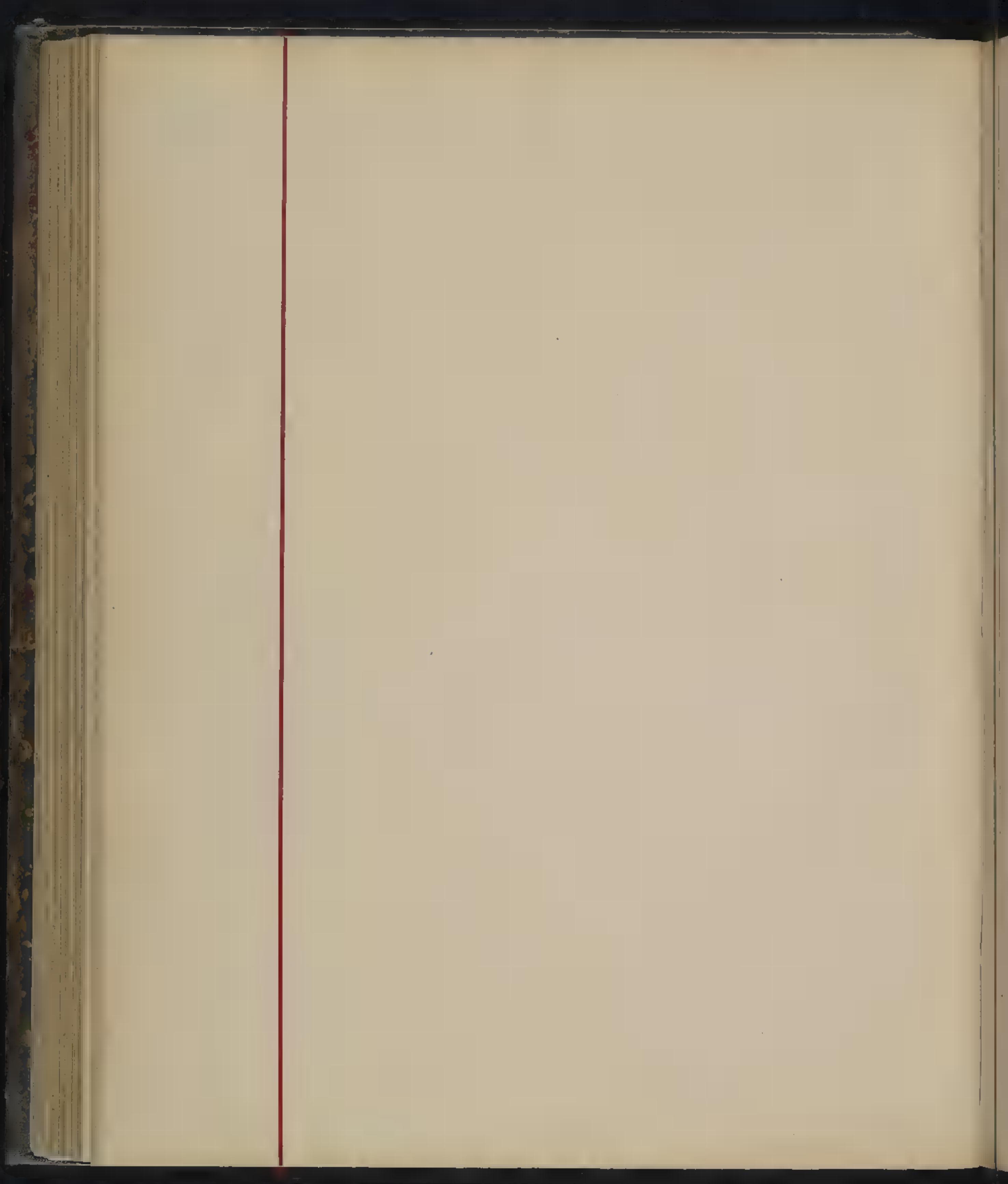


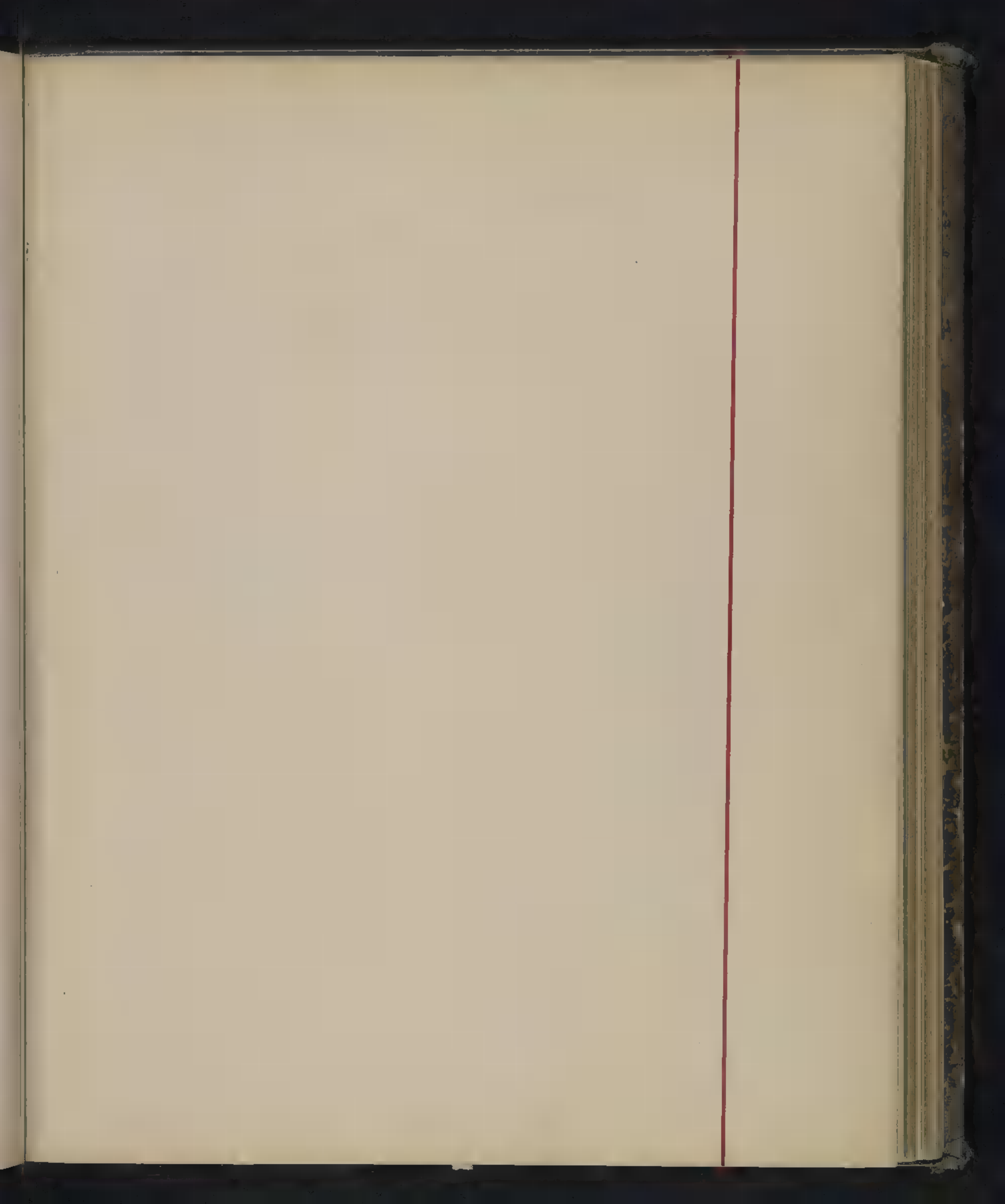


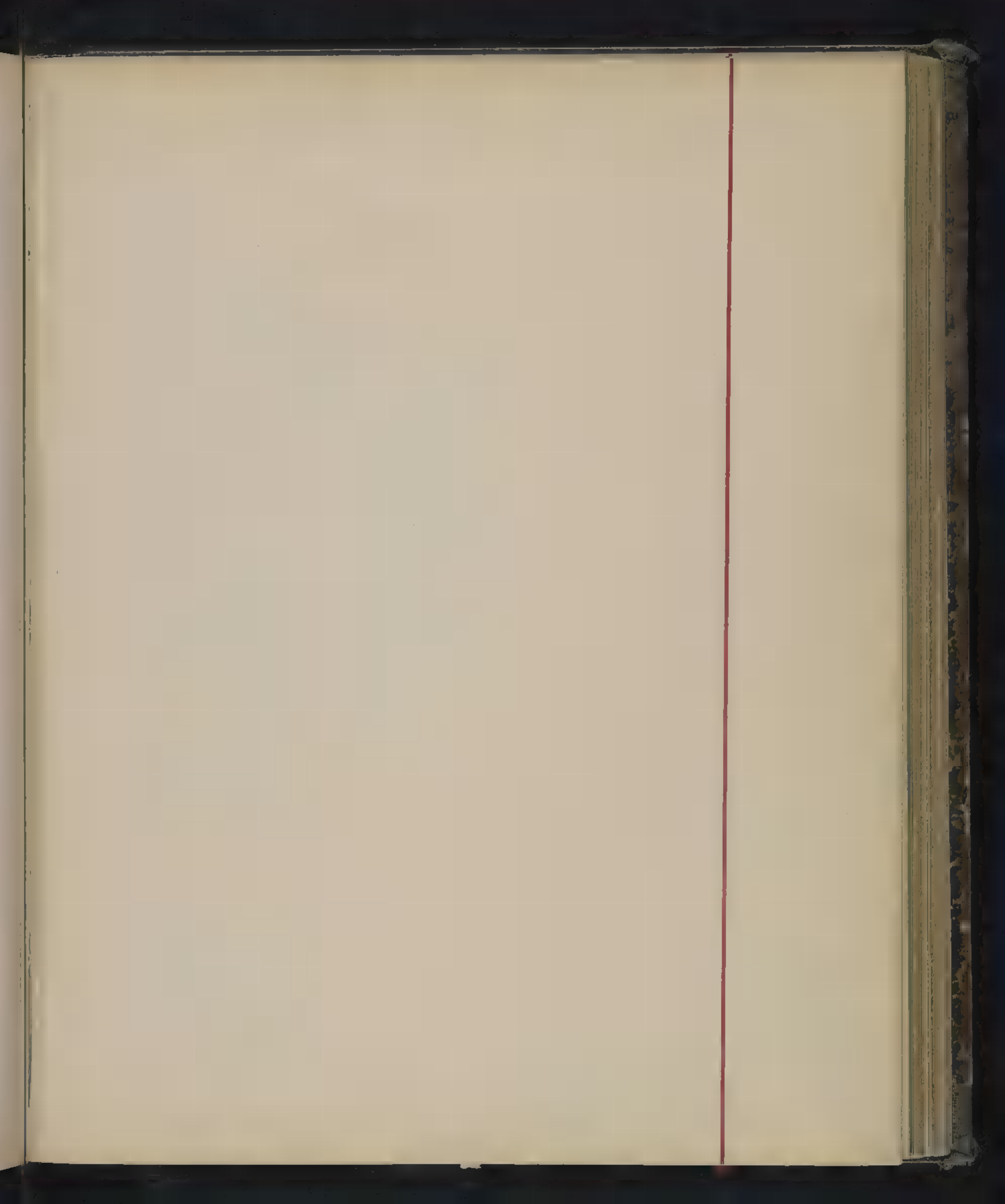


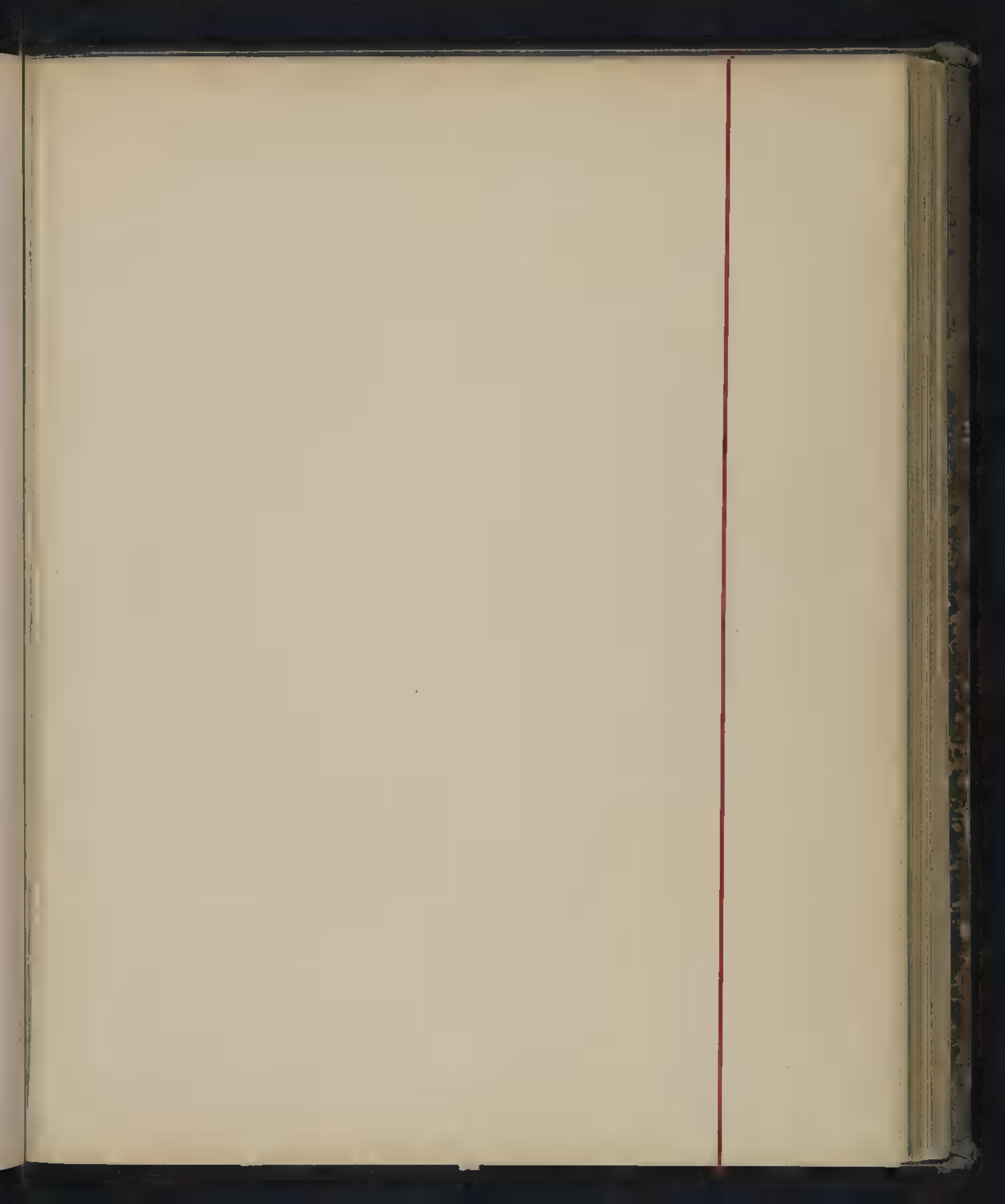












Weierstraß

Anwendungen der elliptischen
Funktionen

auf

Probleme der Geometrie u. Mechanik

Inhalt

Die Bewegung eines einfachen ^{sphärischen} Pendels

p

1906

1

Bewegung eines KÖrps. um einen festen Punkt 70

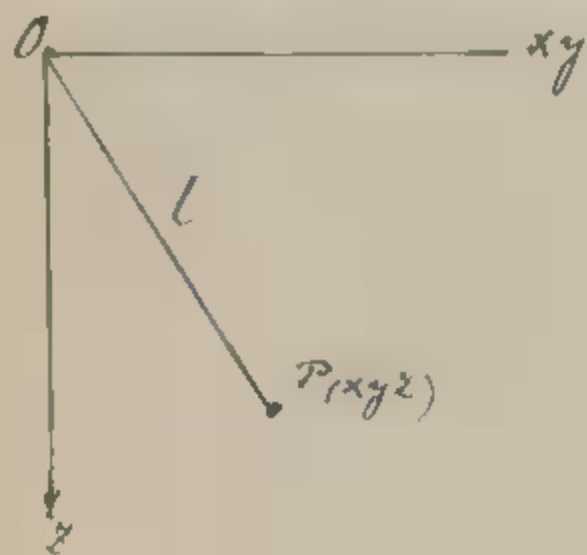
Geodätische Linie auf dem Rotationsellipsoids 139

Entwick. d. Ell. Funct. in Fouriersche Reihe 156
Linz 1879.

Meyer

Die Bewegung des einfachen sphärischen Pendels.

Ein materieller Punkt P , dessen Masse gleich 1 sei, bewegt sich unter der Einwirkung der Schwerkraft, wird dabei aber durch eine zweite Kraft gezwungen, stets in derselben Entfernung l von einem festen Punkte O zu bleiben. Es soll diese Bewegung des Punktes P näher beschrieben werden.



Der Punkt besitze zur Zeit t die Coordinaten x, y, z , bezogen auf ein rechtwinkliges Achsensystem, dessen Ursprung der feste Punkt O ist u. dessen positive z -Achse die Richtung der Schwerkraft angibt. Ist ferner g die Beschleunigung der Schwerkraft, φ die Kraft, welche P in demselben Abstände l von O erhält, so sind die Componenten der Schwerkraft: $0, 0, g$; diejenigen von φ : $-\varphi \frac{x}{l}, -\varphi \frac{y}{l}, -\varphi \frac{z}{l}$ und daher die Bewegungsgleichungen:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x}{dt^2} &= -\frac{x}{l} \varphi \\ 1) \quad \frac{d^2 y}{dt^2} &= -\frac{y}{l} \varphi \\ \frac{d^2 z}{dt^2} &= -\frac{z}{l} \varphi + g \end{aligned}$$

zu denen noch die Bedingung tritt:

$$2, \quad x^2 + y^2 + z^2 = l^2$$

Hieraus ergeben sich ohne Weiteres die beiden Integrale:

$$3, \quad x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} = k$$

$$4, \quad \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = 4gz + h,$$

worin k u. h konstante z. h. von der Zeit t unabhängige Größen sind. Die Gleichung (3) bedeutet den Flächenmoment für die xy -Ebene, die Gleichung (4) den Satz der Erhaltung der lebendigen Kraft. Die Konstanten k u. h sind bestimmt, sobald für eine bestimmte Zeit t_0 der Ort x_0, y_0, z_0 u. die Geschwindigkeitskomponenten des Punktes P gegeben sind. Ist z. B. die Geschwindigkeit zur Zeit t gleich v , zur Zeit t_0 gleich v_0 , so folgt aus (4):

$$v^2 - v_0^2 = 4g(z - z_0)$$

Aus der Identität:

$$\left(x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(x \frac{dx}{dt} + y \frac{dy}{dt}\right)^2 = (x^2 + y^2) \left(\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right)$$

folgt nun mit Berücksichtigung der Gleichungen (2) - (4):

$$k^2 + z^2 \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = (l^2 - z^2) (4gz + h - \left(\frac{dz}{dt}\right)^2) \quad \text{oder:}$$

$$5, \quad \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = \left(1 - \frac{z^2}{l^2}\right) (4gz + h) - \frac{k^2}{l^2}$$

S. Kirch. p. 18

Diff. $x dy - y dx = \dots$

so ist z st. u.

Aus 2

$$x \frac{dy}{dt} + y \frac{dx}{dt} = -z \frac{dz}{dt}$$

Durch welche Gleichung z als elliptische Function von t bestimmt wird. Es sind daher auch die Coordinaten x u. y als Functionen von t darzustellen. Dann pflegt man Polarcoordinaten einzuführen u. zuerst den Winkel zu bestimmen, welchen die Projection von l auf die Horizontalebene mit der x -Achse bildet. Indessen zeigt es sich, dass die Coordinaten selbst weit einfachere Functionen von t werden, als jener Winkel; daher suchen wir dieselben auch direct zu bestimmen. — Die Bewegung des Punktes P wird vollständig bestimmt sein, wenn wir neben der Gleichung (5) noch andere ableiten können, welche die Bewegung des Projektionspunktes von P in der Horizontalebene bestimmen. Dieser Punkt kann aber dargestellt werden durch die complexe Größe $x + iy$. Können wir daher $x + iy$ als Function von t finden, so ist dadurch die Bewegung von P vollständig beschrieben. Nun ist:

$$\begin{aligned} \frac{d \log(x + iy)}{dt} &= \frac{\frac{dx}{dt} + i \frac{dy}{dt}}{x + iy} \\ &= \frac{x \frac{dx}{dt} + y \frac{dy}{dt} + i (x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt})}{x^2 + y^2} \\ &= \frac{ik - y \frac{dz}{dt}}{x^2 + y^2}, \quad \text{also} \end{aligned}$$

mult. mit
 $x - iy$ im Z. & N.

$$6) \quad \frac{d \log(x+iy)}{dt} = \frac{ik - \dot{z} \frac{dz}{dt}}{l^2 - z^2}$$

Hierdurch wird also auch $\log(x+iy)$ als elliptische Funktion von t bestimmt.

Setzt die Constante $k=0$, so vereinfacht sich zwar die Gl. (5) nicht wesentlich, wohl aber die Gl. (6), denn diese ergibt dann:

$$x+iy = C\sqrt{(l^2-z^2)} \quad \text{oder:}$$

$$\frac{x+iy}{x_0+iy_0} = \sqrt{\frac{l^2-z^2}{l^2-z_0^2}} = s$$

$$x = x_0 s$$

$$y = y_0 s, \quad \text{also} \quad \frac{x}{y} = \frac{x_0}{y_0} = \text{const.}$$

Diese Gleichung stellt eine Ebene dar, welche durch die z -Achse gelegt ist. Mithin: Setzt die Constante $k=0$, so schwingt das Pendel in einer vertikalen Ebene.

Die Aufgabe nun, aus den Gleichungen (5) u. (6) z u. $x+iy$ als Functionen von t zu bestimmen, ist ein Specialfall einer Aufgabe allgemeineren Charakters, die sich bei den einzelnen Anwendungen immer wiederholt, nämlich eine Größe x als Function von u zu finden, so dass $\left(\frac{dx}{du}\right)^2$ gleich einer ganzen Function dritten oder vierten Grades von x ist, u. zweitens eine Größe x_1+x_2i so zu bestimmen, dass $\frac{d \log(x_1+x_2i)}{du}$ gleich einer rationalen Function von x u. $\frac{dx}{du}$ ist. Wir lassen daher vor-

läufig das Problem des Pendels bei Seite u. entwikkeln die Formeln, welche die eben erwähnte Aufgabe allgemein lösen.

Es sei:

$$\left(\frac{dx}{du}\right)^2 = R(x) = Ax^4 + 4Bx^3 + 6Cx^2 + 4B'x + A', \text{ oder:}$$

$$7) \quad du = \frac{dx}{\sqrt{R(x)}}$$

An Stelle von x führen wir eine andere Variable ein vermittelt der Gleichung:

$$8) \quad s = \frac{c}{x-a} + b \quad \text{oder} \quad x-a = \frac{c}{s-b}$$

Dann wird:

$$dx = \frac{-c ds}{(s-b)^2}, \quad R(x) = R\left(a + \frac{c}{s-b}\right)$$

Setzen wir ferner:

$$9) \quad R_1(s) = \frac{1}{c^2} (s-b)^4 R\left(a + \frac{c}{s-b}\right)$$

so ist $R_1(s)$ eine ganze Funktion vierten Grades von s u. es wird:

$$\sqrt{R(x)} = \frac{c}{(s-b)^2} \sqrt{R_1(s)}$$

Diese Gleichung ist in dem Sinne zu fassen, dass nachdem der Werth von $\sqrt{R(x)}$ fixirt ist, der Werth von $\sqrt{R_1(s)}$ aus dieser Gleichung bestimmt werden muss. Ist also z. B. $\sqrt{R(x)}$ positiv, so ist, wenn c positiv, auch $\sqrt{R_1(s)}$ positiv; wenn c negativ, auch $\sqrt{R_1(s)}$ negativ zu nehmen. Wir schreiben daher, indem wir $\varepsilon = \pm 1$ setzen vorstehende

Subst.:

$$x = a + \frac{c}{s-b}$$

$$s = \frac{c}{x-a} + b$$

$a = \text{root}$

$$b = \frac{1}{4} R''(a)$$

$$c = \frac{1}{4} R'(a)$$

Gleichung lassen in der Form:

$$10, \quad \sqrt{R(x)} = \frac{\varepsilon c}{(s-b)^2} \sqrt{R_1(s)}$$

Folglich:

$$11, \quad dx = \frac{dx}{\sqrt{R(x)}} = -\varepsilon \frac{ds}{\sqrt{R_1(s)}}$$

Es läßt sich nun leicht zeigen, dass man die Konstanten a, b, c immer so bestimmen kann, dass die Funktion $R_1(s)$ die Form annimmt: $4s^3 - g_2 s - g_3$
Es ist nämlich:

$$R_1(s) = \frac{R(a)}{c^2} (s-b)^4 + \frac{R'(a)}{c} (s-b)^3 + \frac{1}{2} R''(a) (s-b)^2 + \frac{1}{6} c R'''(a) (s-b) + Ac^2,$$

wobei R', R'', R''' Ableitungen von R bedeuten. Da mit nun hieraus das Glied mit s^4 wegfällt, muß $R(a) = 0$ sein d.h. es muß irgend eine der Wurzeln der Gleichung $R(x) = 0$ sein. Ist dies der Fall, so wird:

$$R_1(s) = \frac{R'(a)}{c} s^3 + \left(\frac{1}{2} R''(a) - 3 \frac{b}{c} R'(a) \right) s^2 + \left(3 \frac{b^2}{c} R'(a) - b R''(a) + \frac{1}{6} c R'''(a) \right) s + Ac^2 - \frac{R'(a)}{c} b^3 + \frac{1}{2} R''(a) b^2 - \frac{1}{6} b c R'''(a)$$

Bestimmt man daher c u. b durch die Gleichungen:

$$12, \quad \begin{aligned} c &= \frac{1}{4} R'(a) \\ b &= \frac{1}{24} R''(a) \end{aligned}$$

so fällt das Glied mit s^2 weg u. es nimmt $R_1(s)$ die Form an:

$$R_1(s) = 4s^3 - g_2 s - g_3, \quad \text{wo:}$$

$$g_2 = \frac{1}{48} R''^2(a) - \frac{1}{24} R'(a) \cdot R'''(a)$$

$$g_3 = \frac{1}{24^2} R'(a) \cdot R''(a) \cdot R'''(a) - \frac{1}{3} \frac{1}{24} R''^3(a) - \frac{1}{16} A R'^2(a) \text{ ist.}$$

Setzen wir:

$$R'(x) = 4 R_1(x)$$

$$R''(x) = 12 R_2(x)$$

$$13, \quad R'''(x) = 24 R_3(x)$$

$$24A = R''''(x) = 24 R_4(x)$$

so gehen die Werthe von g_2 u. g_3 über in:

$$g_2 = 3R_2^2(a) - 4R_1(a) \cdot R_3(a)$$

$$g_3 = 2R_1(a) \cdot R_2(a) \cdot R_3(a) - R_4(a) \cdot R_1^2(a) - R_2^3(a)$$

Diese Größen hängen nur scheinbar von a ab, thetisch sind dieselben von a durchaus unabhängig. Der Grund hiervon beruht auf Folgendem: Aus der Gleichung:

$$du = - \frac{ds}{\sqrt{4s^2 g_2 s - g_3}}$$

ergibt sich $s = p(u - u_0)$, wo u_0 eine Constante ist, d.h. es läßt sich s somit auch das ursprüngliche $x = \varphi(u)$ rational durch $p u$ u. $p' u$ ausdrücken. Sollte man nun statt a eine zweite Wurzel der Gleichung $R(x) = 0$ benutzt, so würden die Werthe von g_2 u. g_3 , falls diese Functionen dieser Wurzeln wären, sich geändert haben, u. man würde daher genau in derselben Weise $x = \varphi(u)$ rational aus den mit den veränderten Invarianten gebildeten Größen $p u$ $p' u$ ausgedrückt erhalten. Da man nun auch umgekehrt $p u$ u. $p' u$ durch $\varphi(u)$ u. $\varphi'(u)$ ausdrücken kann, so

würde ein u. dasselbe Werthepaar $\varphi(u), \varphi'(u)$ zu zwei von einander in ihren Entwicklungen verschiedenen Werthepaaren $p u, p' u$ führen, was nicht möglich ist, da man nur rationale Ausdrücke erhält.

Es müssen mithin g_2 u. g_3 von a unabhängig sein. Es ist nun auch leicht g_2 u. g_3 wirklich durch die Coefficienten der Gl. (7) auszu-drücken. Die folgenden beiden Ausdrücke:

$4A' - 4BB' + 3C^2 =$
see following page

$$R R_4 - 4 R_1 R_3 + 3 R_2^2$$

$$R R_2 R_4 + 2 R_1 R_2 R_3 - R R_3^2 - R_1 R_1^2 - R_2^3$$

stimmen nämlich überein mit g_2 u. g_3 überein, wenn man in ihnen $x = a$ setzt, da $R(a) = 0$ ist. Dieselben sind aber überhaupt von x unabhängig, da ihre Ableitungen nach x für je den Werth von x identisch verschwinden. Folglich müssen diese Ausdrücke überhaupt mit g_2 u. g_3 übereinstimmen, da sie dies thun, wenn man einer in ihnen gar nicht vorkommenden Größe einen bestimmten Werth beilegt. Also:

$$g_2 = R R_4 - 4 R_1 R_3 + 3 R_2^2$$

$$g_3 = R R_2 R_4 + 2 R_1 R_2 R_3 - R R_3^2 - R_1 R_1^2 - R_2^3$$

Die Werthe dieser Ausdrücke sind aber unmittelbar angabbar. Denn da sie von x unabhängig sind, so kann man sie bestimmen, indem man

einsetzen in den einzelnen Größen R $x=0$ setzt, wodurch man erhält:

$$14, \quad g_2 = AA' - 4BB' + 3C^2$$

$$g_3 = A(A' + 2B(B' - A)) - A'B^2 - C^3$$

Versetzt man also a eine Wurzel der Gleichung $R(x) = 0$ so setzt man:

$$15, \quad s = \frac{1}{4} - \frac{R'(a)}{x-a} + \frac{1}{24} R''(a)$$

$$\sqrt{R(x)} = -\frac{1}{4} \frac{R'(a)}{(s - \frac{1}{24} R''(a))^2} \sqrt{5}$$

$$\sqrt{S} = \sqrt{R(s)}$$

so wird dadurch die Gleichung:

$$\left(\frac{dx}{du}\right)^2 = Ax^4 + 4Bx^3 + 6Cx^2 + 4B'x + A'$$

unmittelbar übergeführt in die folgende:

$$\left(\frac{ds}{du}\right)^2 = 4s^3 - g_2 s - g_3$$

in der sich die Größen g_2 u. g_3 aus den Gleichungen (14) bestimmen.

Es ist wichtig zu bemerken, dass diese Transformation durchaus unabhängig ist von der besonderen Beschaffenheit von $R(x)$; sie gilt, mögen nun in $R(x)$ einige der Coefficienten verschwinden oder nicht, oder mag die Gleichung $R(x) = 0$ gleiche Wurzeln haben oder nicht, sofern sie nur überhaupt eine Wurzel zulässt. Nur ein Fall scheint eine Ausnahme hiervon zu machen, nämlich der, wo die eine Wurzel der Gl. $R(x) = 0$, also etwa a unendlich groß ist, denn dann neh-

men die Gleichungen (15) eine nicht brauchbare Form an. Jedoch kann man aus den Gl. (15) sehr leicht die für diesen Fall geltende Transformation erhalten. Ist nämlich eine Wurzel einer algebraischen Gleichung unendlich groß, so ist dies bekanntlich gleichbedeutend mit dem Verschwinden des Coefficienten der höchsten Potenz der Unbekannten. Mithin ist im vorliegenden Falle in der Gleichung (7) $A=0$ oder also, es reduziert sich $R(x)$ auf eine Funktion dritten Grades. Setzt man nun in $R(x)$ $x = \frac{1}{\xi}$, so wird die Gleichung

$$R(x) = Ax^4 + 4Bx^3 + 6Cx^2 + 4B'x + A' = 0$$

übergehen in die folgende:

$$\bar{R}(\xi) = A + 4B\xi + 6C\xi^2 + 4B'\xi^3 + A'\xi^4 = 0 \quad (A=0)$$

in welcher nun wieder sämtliche Wurzeln endliche Größen sind. Der Wurzel $\alpha = \infty$ der ersten Gleichung die Wurzel $\frac{1}{\alpha} = 0$ entspricht.

Ferner wird:

$$\frac{dx}{\sqrt{R(x)}} = - \frac{d\xi}{\sqrt{\bar{R}(\xi)}}$$

Hierauf kann man nun die Transformationsformel (15) unmittelbar anwenden, man hat da-
 rin nur für α 0, für x ξ - für $R(x)$ $\bar{R}(\xi)$ zu
 setzen. Dann:

$$\bar{R}'(0) = 4B$$

$$\bar{R}''(0) = 12C$$

ist, so erhält man:

$$s = \frac{B}{\xi} + \frac{1}{2} C$$

$$\sqrt{R(\xi)} = - \frac{B}{(s - \frac{1}{2} C)^2} \sqrt{S} = - \frac{B}{\xi^2} \sqrt{S}$$

als diejenigen Substitutionen, welche die Gleichung:

$$\left(\frac{d\xi}{du} \right)^2 = A + 4B\xi + 6C\xi^2 + 4B'\xi^3 + A'\xi^4 \quad (A=0)$$

in:

$$\left(\frac{ds}{du} \right)^2 = 4s^3 - g_2 s - g_3$$

überführen, worin g_2 u. g_3 aus (14) einfach durch hervorgehen, dass man darin:

$$\begin{array}{ccccc} A & B & C & B' & A' \\ A' & B' & C & B & A \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{resp. mit} \\ \text{vertauscht. Dann} \end{array}$$

$A=0$ setzt, was natürlich wegen der symmetrischen Beschaffenheit der Formeln (14) keine andere Veränderung hervorbringt, als dass die mit A multiplizierten Glieder wegfallen. Gilt man nun, indem man wieder $\xi = \frac{1}{x}$ setzt, zur ursprünglichen Gleichung zurück, so ergibt sich, dass die Gleichungen:

$$\begin{array}{l} 16) \quad s = Bx + \frac{1}{2} C \\ \sqrt{S} = -B \sqrt{R(x)} \end{array}$$

eine derjenigen Substitutionen bestimmen, welche die Gleichung:

$$\left(\frac{dx}{du} \right)^2 = 4Bx^3 + 6Cx^2 + 4B'x + A'$$

in die folgende:

$$\left(\frac{ds}{du}\right)^2 = 4s^3 - g_2 s - g_3$$

überführen, worin g_2 u. g_3 die Werthe haben:

$$17) \quad g_2 = -4BB' + 3C^2$$

$$g_3 = 2BCB' - A'B^2 - C^3$$

Die anderen drei Substitutionen, welche diese leisten, gehen aus der Formel (15) dadurch hervor, dass man in ihnen für α irgend eine der Wurzeln der Gleichung $4Bx^3 + 6Cx^2 + 4B'x + A' = 0$ setzt.

Dieselbe gefundene Resultate lässt sich natürlich auch ganz direct herleiten. Es sei nämlich:

$$R(x) = 4Bx^3 + 6Cx^2 + 4B'x + A'$$

$$= 4B\left(x + \frac{1}{2}\frac{C}{B}\right)^3 + \frac{4BB' - 3C^2}{B}x + A' - \frac{1}{2}\frac{C^3}{B}$$

Setzt man nun hierin:

$$Bx + \frac{1}{2}C = s$$

$$g_2 = -4BB' + 3C^2$$

$$g_3 = 2BCB' - A'B^2 - C^3 \quad \text{endlich}$$

$$\sqrt{4s^3 - g_2 s - g_3} = -B\sqrt{R(x)}$$

so erhält man schließlich die Gleichung:

$$\frac{dx}{\sqrt{R(x)}} = -\frac{ds}{\sqrt{4s^3 - g_2 s - g_3}}$$

Somit wir nachgewiesen, dass die Substitutionen (15) nicht nur in dem Falle wo $R(x)$ vom vierten Grade ist, sondern auch noch dann, wenn $R(x)$ vom dritten Grade ist, zum Ziele führen, wie be-

Wann die 4te power in $R(x)$ ist, so ist die 4te power in $R(x)$

schaffen auch die Wurzel α sein möge.

Wir wollen jetzt annehmen, dass $R(x)$ vom vierten Grade sei, u. die Wurzeln derselben in irgend einer Reihenfolge mit $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ bezeichnen. In Formel (15) sei $\alpha = \alpha_1$. Aus den Formeln (15) folgt:

$$\sqrt{S} = -\frac{1}{4} \frac{R'(\alpha_1)}{(x-\alpha_1)^2} \sqrt{R(x)}$$

Hieraus erkennt man, dass S nur dann verschwinden kann, wenn $R(x) = 0$ ist u. zwar nur für die Werte $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ von x . Bezeichnen wir daher die drei Wurzeln der Gleichung $S=0$ den Größen $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4$ entsprechend mit l_1, l_2, l_3 , so erhält man:

$$l_1 = \frac{1}{4} \frac{R'(\alpha_1)}{\alpha_2 - \alpha_1} + \frac{1}{24} R''(\alpha_1)$$

$$18) \quad l_2 = \frac{1}{4} \frac{R'(\alpha_1)}{\alpha_3 - \alpha_1} + \frac{1}{24} R''(\alpha_1)$$

$$l_3 = \frac{1}{4} \frac{R'(\alpha_1)}{\alpha_4 - \alpha_1} + \frac{1}{24} R''(\alpha_1)$$

aus form. 15

und hieraus:

$$l_1 - l_2 = -\frac{1}{4} R'(\alpha_1) (\alpha_2 - \alpha_3)$$

$$19) \quad l_1 - l_3 = -\frac{1}{4} R'(\alpha_1) (\alpha_2 - \alpha_4)$$

$$l_2 - l_3 = -\frac{1}{4} R'(\alpha_1) (\alpha_3 - \alpha_4)$$

Durch diese Formeln sind die Größen l bestimmt, sobald man die Wurzeln der Gleichung $R(x) = 0$ kennt, umgekehrt aber können dieselben auch dazu dienen, die Auflösung der Gleichung vierten Grades $R(x) = 0$ auf diejenige dritten Grades

zu reduzieren.

Da man in den Gleichungen (15) für α jede der Wurzeln der Gleichung $R(x) = 0$ substituieren kann, so erhält man vier verschiedene Transformationsformeln, welche von diesen man in jedem einzelnen Falle anzuwenden hat, hängt hauptsächlich von dem Intervalle ab, in welchem sich x bewegt.

Das allgemeine Integral der Differentialgleichung:

$$\left(\frac{ds}{du}\right)^2 = 4s^3 - g_2 s - g_3$$

$s = p(u - u_0)$ ist, wo u_0 eine Constante bedeutet, so folgt aus (15) für x der Werth:

$$20) \quad x = \alpha + \frac{\frac{1}{4} R'(\alpha)}{p(u - u_0) - \frac{1}{24} R''(\alpha)}$$

Berechnen wir mit u_1 einen der Werthe von u , für welchen $p(u - u_0)$ den Werth $\frac{1}{24} R''(\alpha)$ annimmt, also:

$$21) \quad p(u_1 - u_0) = \frac{1}{24} R''(\alpha),$$

"Tasche's Ausgabe"

$$p(u - u_0) = \frac{\sigma(u + u_0) \cdot \sigma(u - u_0)}{\sigma^2 u \cdot \sigma^2 u_0}$$

so wird:

$$x = \alpha + \frac{\frac{1}{4} R'(\alpha)}{p(u - u_0) - p(u_1 - u_0)}$$

$$22) \quad = \alpha - \frac{1}{4} R'(\alpha) \frac{\sigma^2(u - u_0) \cdot \sigma^2(u_1 - u_0)}{\sigma(u + u_1 - 2u_0) \sigma(u - u_1)}$$

Es ist mithin $x - \alpha$ eine gewöhnliche elliptische Function zweiten Grades mit der zweifachen Null-

stelle $u = u_0$ — den beiden einfachsten Unendlich
 $u = 2u_0 - u_1$... $u = u_1$. Sobald daher die beiden Wer-
the u_0 ... u_1 gegeben sind, kann man unmittel-
bar den Werth von $x - a$ aufstellen. Es laßt sich
jedoch x noch in anderer Form darstellen. Schrei-
ben wir nämlich den Werth von x , (20), wie folgt:

$$x = a \frac{s - c}{s - \frac{1}{2\pi} R''(a)}$$

worin c eine ganz bestimmte Constante bedeutet,
es wird es auch einen Werth von u geben, für
welchen $s = c$ wird. Derselbe sei mit u' bezeich-
net, also $p(u' - u_0) = c$, dann ist:

$$x = a \frac{p(u - u_0) - p(u' - u_0)}{p(u - u_0) - p(u_1 - u_0)}$$

hieraus folgt:

$$x = \left(\frac{\sigma(u - u') \sigma(u + u' - 2u_0)}{\sigma(u - u_1) \sigma(u + u_1 - 2u_0)} \right)$$

oder wenn $u_2 = -u_1 + 2u_0$ gesetzt wird:

$$23, \quad x = \left(\frac{\sigma(u - u') \sigma(u + u' + u_1 - u_2)}{\sigma(u - u_1) \sigma(u - u_2)} \right)$$

Es wird mithin x gleich 0 an den Stellen
 $u = u'$... $u = -u' + u_1 + u_2$... unendlich an den
Stellen $u = u_1$... $u = u_2$. Die Constante c ist be-
stimmt, sobald der Werth von x für irgend einen
Werth von u gegeben ist. Um nun die Größen
 u_1 , u_2 , u' zu bestimmen, ist es natürlich nicht
nötig, die obige Transformation auszuführen,

$\sigma(u, u_0)$ & $\sigma(u', u_0)$
sind Constanten
und in C enthalten

Wenn sobald für irgend einen Werth von u der Werth von x u. der Werth von $\frac{dx}{du}$ gegeben ist, ist x vollständig durch die gegebene Differentialgleichung bestimmt, also von der gemachten Transformation durchaus unabhängig. Es müssen sich daher die Größen u , u_1 , u_2 noch auf andere Weise mit Hilfe der Differentialgleichung definiren lassen. Setzt man nun z. B. fest, dass für $u=0$ $x=a$ werden solle, so ergibt sich aus der gegebenen Differentialgleichung:

$$u = \int_a^x \frac{dx}{\sqrt{R(x)}}$$

wodurch u eindeutig definiert ist, sobald noch über den Werth von $\sqrt{R(x)}$ eine bestimmte Annahme gemacht ist (eindeutig reellwertig bis auf Vielfache gewisser Constanten). Da nun u_1 einer der beiden Werthe ist, wofür $x=\infty$ wird, so ist:

$$u_1 = \int_a^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{R(x)}}$$

Dabei ist die Integration auf irgend einem Wege von a bis ins Unendliche fortzuführen für $x=\infty$ nimmt das Integral, abgesehen noch von gewissen Constanten, ebenfalls zwei Werthe an, da sich, wie aus der Entwicklung:

$$R(x) = Ax^4 \left(1 + 4 \frac{B}{A} x^{-1} + \dots \right)$$

herausgeht, $\frac{\sqrt{R(x)}}{x^2}$ sowohl dem Werthe $+ \sqrt{R}$ als dem Werthe $- \sqrt{R}$ näher kommen können. Der eine Werth, welchen jenes Integral annimmt, ist dann mit u , der andere mit u_2 zu bezeichnen. — In ganz analoger Weise ergeben sich die Werthe von u , für welche $x=0$ wird, nämlich:

$$u' = \int_a^0 \frac{dx}{\sqrt{R(x)}}$$

Dieses Integral besitzt wiederum zwei Werthe, welche die Nullstellen der Function $x = \varphi(u)$ ergeben. Man kann daher unabhängig von der gewählten Transformation die Null- u. Umkehrheitsstellen von x auch durch bestimmte Integrale definieren:

Wir leiten nun noch eine Hauptformel ab, welche sich aus der Relation:

$$\frac{\zeta'(u-v)}{\zeta(u-v)} = \frac{\zeta'(u)}{\zeta(u)} - \frac{\zeta'(v)}{\zeta(v)} + \frac{1}{2} \frac{p'u + p'v}{p'u - p'v}$$

ergibt. Vertauscht man nämlich hierin u resp. mit v u. w , sodann mit w u. u und addirt diese drei Gleichungen, so entsteht:

$$24) \frac{\zeta'(u-v)}{\zeta(u-v)} + \frac{\zeta'(v-w)}{\zeta(v-w)} + \frac{\zeta'(w-u)}{\zeta(w-u)} = \frac{1}{2} \frac{p'u + p'v}{p'u - p'v} + \frac{1}{2} \frac{p'v + p'w}{p'v - p'w} + \frac{1}{2} \frac{p'w + p'u}{p'w - p'u}$$

Es ist nun wichtig zu bemerken, dass diese Formel auch gilt, wenn man an die Stelle von $p'u$

eine beliebige elliptische Function zweiten Grades setzt, also z. B. unser x . Um dies nachzuweisen schreiben wir vorstehende Gleichung zunächst in der Form:

$$24^a) \quad \frac{\sigma'(u-v)}{\sigma(u-v)} + \frac{\sigma'(v-w)}{\sigma(v-w)} + \frac{\sigma'(w-u)}{\sigma(w-u)} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial u} \log(pu-pv) - \frac{\partial}{\partial v} \log(pu-pv) \right) \\ + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial v} \log(pv-pw) - \frac{\partial}{\partial w} \log(pv-pw) \right) \\ + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial w} \log(pw-pu) - \frac{\partial}{\partial u} \log(pw-pu) \right)$$

Unmittelbar ist ersichtlich, dass unsere Formel bestehen bleibt, wenn man von jeder der Größen u v w dieselbe GröÙe u_0 subtrahiert, da hierdurch die linke Seite ungewandelt bleibt.

Eine allgemeine elliptische Function zweiten Grades stellt sich daher in der Form:

$$x = \frac{\alpha s + \beta}{\gamma s + \delta}$$

worin $s = p(u-u_0)$ gesetzt ist. Wir wollen daher setzen, um mögliche Symmetrie herzustellen:

$$25) \quad x = \frac{\alpha \xi + \beta}{\gamma \xi + \delta}, \quad y = \frac{\alpha \eta + \beta}{\gamma \eta + \delta}, \quad z = \frac{\alpha \xi + \beta}{\gamma \xi + \delta}$$

$$\xi = p(u-u_0), \quad \eta = p(v-u_0), \quad \xi = p(w-u_0)$$

Mit Hilfe der letzteren Bezeichnung können wir obige Formel auch so schreiben:

$$24^b) \quad \frac{\sigma'(u-v)}{\sigma(u-v)} + \frac{\sigma'(v-w)}{\sigma(v-w)} + \frac{\sigma'(w-u)}{\sigma(w-u)} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \log(\xi-\eta)}{\partial u} - \frac{\partial \log(\xi-\eta)}{\partial v} \right) \\ + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \log(\eta-\xi)}{\partial v} - \frac{\partial \log(\eta-\xi)}{\partial w} \right) \\ + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \log(\xi-\xi)}{\partial w} - \frac{\partial \log(\xi-\xi)}{\partial u} \right)$$

Nun ist:

$$x - y = \frac{(\alpha\delta - \beta\gamma)(\xi - \eta)}{(\gamma\xi + \delta)(\gamma\eta + \delta)}, \quad \text{folglich}$$

$$\frac{\partial \log(x-y)}{\partial u} - \frac{\partial \log(x-y)}{\partial v} = \frac{\partial \log(\xi-\eta)}{\partial u} - \frac{\partial \log(\xi-\eta)}{\partial v} - \frac{\partial \log(\gamma\xi + \delta)}{\partial u} + \frac{\partial \log(\gamma\eta + \delta)}{\partial v}$$

oder auch:

$$\frac{\partial \log(\eta-\xi)}{\partial v} - \frac{\partial \log(\eta-\xi)}{\partial w} = \frac{\partial \log(\eta-\xi)}{\partial v} - \frac{\partial \log(\eta-\xi)}{\partial w} - \frac{\partial \log(\gamma\eta + \delta)}{\partial v} + \frac{\partial \log(\gamma\xi + \delta)}{\partial w}$$

$$\frac{\partial \log(\xi-x)}{\partial w} - \frac{\partial \log(\xi-x)}{\partial u} = \frac{\partial \log(\xi-x)}{\partial w} - \frac{\partial \log(\xi-x)}{\partial u} - \frac{\partial \log(\gamma\xi + \delta)}{\partial w} + \frac{\partial \log(\gamma\xi + \delta)}{\partial u}$$

Addiert man nun die letzten drei Gleichungen, so erhält man auf der rechten Seite gerade den mit 2 multiplizierten Ausdruck auf der rechten Seite der Gleichung (24^b). Mittels wird:

$$\begin{aligned} \frac{\sigma'(u-v)}{\sigma(u-v)} + \frac{\sigma'(v-w)}{\sigma(v-w)} + \frac{\sigma'(w-u)}{\sigma(w-u)} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \log(x-y)}{\partial u} - \frac{\partial \log(x-y)}{\partial v} \right) \\ &+ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \log(\eta-\xi)}{\partial v} - \frac{\partial \log(\eta-\xi)}{\partial w} \right) \\ &+ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \log(\xi-x)}{\partial w} - \frac{\partial \log(\xi-x)}{\partial u} \right) \end{aligned}$$

oder wenn man $x = \varphi(u)$ setzt:

$$26) \quad \frac{\sigma'(u-v)}{\sigma(u-v)} + \frac{\sigma'(v-w)}{\sigma(v-w)} + \frac{\sigma'(w-u)}{\sigma(w-u)} = \frac{1}{2} \frac{\varphi'(u) + \varphi'(v)}{\varphi(u) - \varphi(v)} + \frac{1}{2} \frac{\varphi'(v) + \varphi'(w)}{\varphi(v) - \varphi(w)} + \frac{1}{2} \frac{\varphi'(w) + \varphi'(u)}{\varphi(w) - \varphi(u)}$$

Hiermit ist aber unsere Behauptung erwiesen. Wir können also sagen: Durch die Differentialgleichung $\left(\frac{dx}{du}\right)^2 = R(x)$, wo $R(x)$ vom dritten oder vierten Grade ist, wird eine allgemeine elliptische Funktion zweiten Grades definiert. Zu dieser Funktion $\varphi(u)$ gehören zwei Invarianten g_2 und g_3 .

deren Werthe sich aus den Coefficienten von $R(x)$ mittelst der Formeln (14) bestimmen.

Bildet man nun mit Hilfe dieser Invarianten die Function $G(u)$, so besteht zwischen dieser u. der Function $\varphi(u)$ die Gleichung (26). Dabei ist vorausgesetzt, dass von den Werthen von u & v keine zwei einander congruent sind, da sonst auf der linken Seite einer der Nenner verschwinden würde.

Aus dieser Gleichung (26) ergeben sich noch andere durch Specialisirung der Grössen u u. v . Nehmen wir z. B. an, dass v einer der Werthe sei, so dass $\varphi(u) = \infty$ wird, .. als solcher werde v mit u bezeichnet, & während v willkürlich, nur nicht congruent u , gewählt werden soll, so folgt unmittelbar aus obiger Gleichung:

$$\frac{G'(u, v)}{G(u, v)} = \frac{G'(u, u)}{G(u, u)} + \frac{G'(v, u)}{G(v, u)} = \frac{1}{2} \frac{\varphi''u + \varphi''v}{\varphi u - \varphi v} + \frac{1}{2} \lim_{w \rightarrow v} \frac{\varphi'w}{(\varphi w)^2} (\varphi u - \varphi v)$$

Nun ist:

$$\varphi''w = A\varphi''w + 4B\varphi'w + 6C\varphi''w + 4B'\varphi'w + A'$$

$$\left(\frac{\varphi'w}{\varphi''w} \right)^2 = A + \frac{4B}{\varphi''w} + \dots$$

mithin:

$$27) \lim_{w \rightarrow u} \frac{\varphi'w}{\varphi''w} = \pm \sqrt{A}$$

Verstehen wir daher unter u , gerade diejenigen Werthe von u , für welchen sich dieser Quotient der

Grenze $+ \sqrt{A}$ nahest, oder:

$$\lim_{w \rightarrow u} \frac{\varphi' w}{\varphi w} = + \sqrt{A}$$

es geht obige Gleichung über in:

$$28) \frac{\zeta'(u-v)}{\zeta(u-v)} - \frac{\zeta'(u-u_1)}{\zeta(u-u_1)} + \frac{\zeta'(v-u_1)}{\zeta(v-u_1)} = \frac{1}{2} \frac{\varphi' u + \varphi' v}{\varphi u - \varphi v} + \frac{1}{2} \sqrt{A} (\varphi u - \varphi v)$$

Diese Gleichung ist besonders bemerkenswerth in dem Falle, wo $A=0$, also die Function $R(x)$ nur vom dritten Grade ist, da in diesem Falle die vorstehende Gleichung unmittelbar zur Integration geeignet ist.

Ist $R(x)$ nur vom dritten Grade, so sind die Werthe, wofür $\varphi u = \infty$ wird alle unter einander congruent, denn da in diesem Falle $\varphi(u)$ nach Gl. (16) sich darstellt in der Form:

$$29) \varphi u = \alpha p(u-u_0) + \beta,$$

so kann φu nur dann unendlich groß werden, wenn $p(u-u_0) = \infty$ ist d.h. wenn $u-u_0$ gleich einer Periode ist. Jede dieser Unendlichkeitsstellen ist aber dann vom zweiten Grade, da die Entwicklung von φu nach Potenzen von $u-u_0$ mit der zweiten Potenz beginnt. — Ist dagegen $A (=) 0$, so stellt sich nach Gl. (25) φu dar in der Form:

$$30) \varphi(u) = \frac{\alpha p(u-u_0) + \beta}{\gamma p(u-u_0) + \delta}$$

Es wird daher $\varphi(u)$ nur endlich für denjenigen Werth von u , für welchen: $p(u-u_0) = -\frac{\delta}{\gamma}$ ist. Da aber $p(u-u_0)$ eine gerade Function ist, so ist es nicht möglich, dass es zwei Werthe von u gibt, für welche $p(u-u_0)$ diesen Werth annimmt. Dieselben unterscheiden sich dadurch von einander, dass für die \sqrt{A} entgegengesetzte Werthe annimmt. Aus Gl. (30) folgt nämlich:

$$p(u-u_0) = -\frac{\beta - \delta \varphi u}{\gamma \varphi u - \alpha}$$

$$p'(u-u_0) = \frac{\alpha \delta - \gamma \beta}{(\gamma \varphi u - \alpha)^2} - \varphi' u$$

$$= \frac{\alpha \delta - \gamma \beta}{\gamma^2 (1 - \gamma^2 \varphi^2 u)^2} - \frac{\varphi' u}{\varphi^2 u}$$

Nimmt man nun u in der Nähe eines der Werthe an, für welche $\varphi u = \infty$ ist, so nähert sich $\frac{\varphi' u}{\varphi^2 u}$ der Grenze $\pm \sqrt{A}$, also haben wir, wenn wir denjenigen Werth, wofür diese Grenze $-\sqrt{A}$ ist, mit u_2 bezeichnen:

$$31) \quad \begin{aligned} p'(u_1 - u_0) &= \frac{\alpha \delta - \gamma \beta}{\gamma^2} \sqrt{A} \\ p'(u_2 - u_0) &= \frac{\alpha \delta - \gamma \beta}{\gamma^2} - \sqrt{A} \end{aligned} \quad , \quad p(u_1 - u_0) = -\frac{\delta}{\gamma}$$

Es gibt also in dem Falle, wo $\delta (=) 0$ ist, zwei einander nicht congruente Werthe von u , u_1 , u_2 , wofür die Function $\varphi(u) = \infty$ ist aber für jeden derselben nur mit der Ordnungszahl 1. Diesen beiden

Werthe von u geliegt entgegengesetzte Werthe von \sqrt{A} zu. Mithin folgt aus der Gleichung (28), wenn man darin statt u , u_2 einführt:

$$32) \frac{\zeta'(u-v)}{\zeta(u-v)} - \frac{\zeta'(u-u_2)}{\zeta(u-u_2)} + \frac{\zeta'(v-u_2)}{\zeta(v-u_2)} = \frac{1}{2} \frac{\varphi'u + \varphi'v}{\varphi u - \varphi v} - \frac{1}{2} \sqrt{A} (\varphi u - \varphi v)$$

Subtrahirt man jetzt diese Gleichung von (28) so kommt:

$$33) \sqrt{A} (\varphi u - \varphi v) = \frac{\zeta'(u-u_2)}{\zeta(u-u_2)} - \frac{\zeta'(u-u_1)}{\zeta(u-u_1)} - \frac{\zeta'(v-u_2)}{\zeta(v-u_2)} + \frac{\zeta'(v-u_1)}{\zeta(v-u_1)}$$

Diese Gleichung enthält noch die willkürliche Constante v . Dieselbe kann weiter anders so bestimmt werden, dass $\varphi v = 0$ ist. Berechnen wir diesen besonderen Werth von v mit v_1 , so ist:

$$34) \sqrt{A} \varphi u = \frac{\zeta'(u-u_2)}{\zeta(u-u_2)} - \frac{\zeta'(u-u_1)}{\zeta(u-u_1)} - \frac{\zeta'(v_1-u_2)}{\zeta(v_1-u_2)} + \frac{\zeta'(v_1-u_1)}{\zeta(v_1-u_1)}$$

... Diese Formel dient dazu, das Integral über φu selbst anzuführen. Mithin derselben wird φu im dem Falle wo $A = 0$ ist, dargestellt bis auf constante Glieder durch Ableitungen von $\log \zeta(u-u_2)$ u. $\log \zeta(u-u_1)$. Es fragt sich, ob nicht in dem Falle, wo $A = 0$ ist, eine analoge Formel stattfindet. Dies ist nun in der That der Fall; sie ist nämlich keine andere als die Gleichung (29):

$$\varphi(u) = \alpha \varphi(u-u_0) + \beta$$

welche man auch so schreiben kann:

$$35, \quad \varphi(u) = -\alpha \frac{d^2 \log G(u-u_0)}{du^2} + \beta.$$

Es tritt also dann die zweite Ableitung des $\log G u$ auf.

Wir haben im Vorhergehenden die Differentialgleichung $(\frac{dx}{du})^2 = R(x)$ auf die folgende:
 $(\frac{ds}{du})^2 = 4s^3 - g_2 s - g_3$ zurückgeführt und zwar darauf,
 dass wir festsetzen, es solle s für einen der Wurzeln
 von x , für welchen $R(x) = 0$ ist, unendlich groß wer-
 den. Dabei macht es keinen wesentlichen Unter-
 schied, ob in $R(x)$ der erste Coefficient ist gleich 0
 oder nicht. Man kann sich nun die all-
 gemeinere Aufgabe vorstellen, die Differentialglei-
 chung $(\frac{dx}{du})^2 = R(x)$ in die andre $(\frac{ds}{du})^2 = 4s^3 - g_2 s - g_3$
 zu transformiren, unter der Bedingung, dass s
 nicht gerade für eine Wurzel der Gleichung $R(x) = 0$,
 sondern für einen beliebig vorgeschriebenen
 Werth x_0 von x unendlich groß werden solle.
 Dass zugleich über das entsprechende Zeichen von
 $R(x)$ beliebig disponirt werden kann, dass also für s
 einen solchen Ausdruck geben muss, welcher für
 $x = x_0$ unendlich groß wird, lässt sich mit Hilfe
 des Additionstheorems einsehen. Man kann näm-
 lich erreicht die ursprüngliche Differentialglei-

chung zu mischführen auf eine von der Form
 $\left(\frac{ds_1}{du}\right)^2 = S_1$ mit Hilfe der oben gegebenen Transfor-
 mation, so dass also s_1 unendlich wird, wenn x
 einem der Werthe annimmt, wofür $R(x)$ verschwin-
 det. Diese Transformation d. h. das allgemeine In-
 tegral der letzteren Gleichung ist von der Form:

$$s_1 = p(u - u_0) = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}$$

Setzt man nun $s = pu$, so genügt s genau der-
 selben Differentialgleichung wie s_1 , wird aber
 unendlich für $u = 0$, während s_1 für $u = u_0$
 unendlich groß ist. Gehört daher zum Werthe $u = 0$
 der Werthe $x = x_0$, so wird:

$$pu_0 = \frac{\alpha x_0 + \beta}{\gamma x_0 + \delta}$$

... es wird s unendlich groß werden, sobald x den
 Werth x_0 annimmt. Dieses zeigt sich denn auch in
 dem Ausdrucke, den man für s mittelst des Addi-
 tivstheorems erhält. Es ist nämlich:

$$s = pu = p((u - u_0) + u_0) = \frac{(p(u - u_0) + pu_0)(2p(u - u_0)pu_0 - \frac{1}{2}q)}{2(p(u - u_0) - pu_0)^2}$$

Demnach ist:

$$p'(u - u_0) = -\frac{\alpha\delta - \beta\gamma}{(\gamma x + \delta)^2} - \sqrt{R(x)}$$

$$p'u_0 = \frac{\alpha\delta - \beta\gamma}{(\gamma x_0 + \delta)^2} - \sqrt{R(x_0)}$$

wo unter $\sqrt{R(x)}$ gerade derjenige Werth von $\frac{dx}{du}$ zu
 verstehen ist, welcher das vorgeschriebene Zeichen be-

sieht. Setzt man daher die Werthe von $p(u-u_0)$, $p'u_0$, $p'(u-u_0)$, $p'u_0$ in den Ausdruck für s ein, so erhält dasselbe die Gestalt:

$$36) \quad s = pu = \frac{(x, x_0) + \varepsilon \sqrt{R(x)} \sqrt{R(x_0)}}{2 (x - x_0)^2},$$

worin (x, x_0) eine ganze in $x - x_0$ symmetrische Function zweiten Grades und ε eine Constante bedeutet. Hithin lässt sich die Differentialgleichung $(\frac{dx}{du})^2 = R(x)$ in die andere $S = (\frac{ds}{du})^2$ überführen, so dass $s = \infty$ wird für einen beliebig gegebenen Werth x_0 von x . Dass ungleich über das Vorzeichen des zugehörigen Werthes von $\sqrt{R(x)}$ willkürlich verfügt werden kann.

Diese Bemerkung ist deshalb von besonderer Wichtigkeit, weil sie einen zweiten Ausgangspunkt bildet für die Behandlung der elliptischen Functionen. Im Vorhergehenden sind wir nämlich ausgehend von den θ -Functionen zur Formel (36) gelangt. Wenn man nun aber eine derartige Formel wie (36) a priori ableiten, also beweisen kann, dass sich die Gleichung $du = \frac{dx}{\sqrt{R(x)}}$ unter allen Umständen in die andere $du = -\frac{ds}{\sqrt{S}}$ transformiren lässt, so kann man daraus unmittelbar die Existenz eines Additionstheorems für die Functionen pu nachweisen und so die Theorie der ellipti-

schen Functionen begründen. ausgehend von der
 Differentialgleichung $(\frac{ds}{du})^2 = 4s^3 - g_2 s - g_3$ zeigten
 wir nämlich, dass es für kleine Werthe von
 u eine Potenzreihe gibt, welche dieser Differen-
 tialgleichung genügt. Die Eigenschaft besitzt
 für $u=0$ unendlich groß zu werden. Von dieser
 so definierten Function $p(u)$ konnten wir dann
 ferner beweisen, dass für sie ein Additionstheo-
 rem besteht. Auf Grund desselben ergab sich
 dann, dass aus dieser Function $p(u)$ durch Fort-
 setzung eine eindeutige Function entspringt,
 welche darstellbar ist in der Form eines An-
 driucks aus zwei beständig convergirenden
 Potenzreihen. Damit war zugleich die allge-
 meine Definition einer elliptischen Function gege-
 ben. Die Schwierigkeit, die bei diesem Gange der
 Untersuchung in der Theorie dieser Functionen
 hervortritt, besteht einzig und allein darin, eine
 richtige Einsicht in die eigentliche Natur der
 durch jene Differentialgleichung definierten Fun-
 ctionen zu erlangen. Sie ist auch der Grund der
 langsame Entwicklung der Theorie gewesen.
 Dann obwohl Jacobi diese Schwierigkeit konnte
 nicht überwinden, so hat er den „fundamentale nova“
 eingeschlagenen Weg verlassen. in seinem späteren

Vorlesungen die Theorie der elliptischen Functionen
 ausgehend von den \mathcal{I} Functionen behandelte, ver-
 mochte er doch nicht dieselbe zu beseitigen. Legendre
 und Jacobi gingen aus von der Untersuchung des
 Integrals:

$$u = \int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$$

worin k reell & kleiner als 1 u. Die Integration
 so auszuführen ist, dass für $x=0$ der Werth der
 Quadratwurzel gleich +1 ist. Auf diese Form konnte
 Legendre das Integral:

$$u = \int \frac{dx}{\sqrt{R(x)}}$$

unter der Bedingung zurückgeführt, dass die Coef-
 fizienten von $R(x)$ reell seien. Das erste Integral
 bot nun keine Schwierigkeit dar, wenn man dem
 x nur reelle Werthe zwischen -1 u. $+1$ beilegte. Denn
 sobald festgesetzt war, dass für $x=0$ der Werth der
 Wurzel gleich +1 sein solle, so konnte, da die Wur-
 zelgröße sich bis $x = \pm 1$ mit x stetig ändert, über
 das Vorzeichen von u kein Zweifel entstehen. Dies
 geschah aber, sobald x über dieses Intervall hinaus-
 ging, da die Wurzelgröße zunächst gleich 0 u. dann
 imaginär wurde. Aber bei größerer Aufmerksam-
 keit konnte man schon, wenn x zwischen -1 u. $+1$

lang, einen Zeichenwechsel wahrzunehmen, denn man könnte die Integration offenbar auch so ausführen können, dass man zunächst von 0 bis +1 resp. -1 u. sodann rückwärts von +1 resp. -1 zu x ging. Da nun auf diesem Wege $R(x)$ einmal gleich 0 geworden ist, so könnte auch u sein Zeichen gewechselt haben. Die beste Illustration hierzu giebt in der That die Legendre'sche Transformation:

$$u = \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}}$$

mittels der Substitution $x = \sin \varphi$. Beschränkt man nämlich hierbei φ nicht bloss auf Werthe des ersten Quadranten, sondern lässt man φ auch Werthe des zweiten Quadranten annehmen, so ist ^{man} ~~man~~ aus dem für x festgesetzten Intervalle nicht herausgegangen, dagegen ist für den Endwerth von x $\frac{dx}{d\varphi} = \cos \varphi$ negativ geworden, d. h. es hat die Quadratwurzel ihr Zeichen geändert. Lässt man φ von 0 bis ∞ wachsen, so kann u alle reellen Werthe von $-\infty$ bis $+\infty$ annehmen. Darob ist aber schon die Nothwendigkeit, in der Theorie der elliptischen Functionen dem Argumente u auch complexen Werthe beizulegen. Die Definition dieser Functionen für rein imaginäre Argumente

bot keine Schwierigkeit, indem man nun auf $\varphi(u + vi)$ das von Euler für reelle Werthe bewiesene Additionstheorem anwandte u. zeigen konnte, dass ^{die} so entstehende complexe Größe die Bedingungen erfüllte, welche für eine monogene Function von $u + vi$ bestehen müssen, hatte man auch die Definition für beliebige complexe Argumente gegeben, jedoch noch unter der Voraussetzung, dass die Moduln k reell u. kleiner als 1 seien.

Jacobi kam jedoch bei seinen Untersuchungen über die Transformation der elliptischen Integrale auch auf imaginäre Moduln. Indem er sich die Aufgabe vorlegte, das Legendre'sche Integral in ein anderes von ähnlicher Gestalt zu verwandeln, in welchem an die Stelle des Moduls k ein anderer λ u. an die Stelle des Winkels φ ein anderer φ getreten ist, fand er, dass λ u. k durch eine algebraische Gleichung zusammenhängen, welche stets zwei reelle Werte von λ liefert, von denen der eine kleiner, der andere größer als k war. Da aber jene Gleichung irreducibel war, so war es ihm klar, dass die anderen Wurzeln derselben für die Transformation dieselbe Bedeutung haben mussten, wie die reellen. Es musste also auch möglich sein, durch die ursprüngliche Gleichung eine eindeutige Function von u zu

definieren, auch wenn die Coefficienten von $R(x)$ complex waren. Dies bot aber in der ersten Zeit sehr große Schwierigkeiten dar. Zudem man das allgemeine Integral der Betrachtung zu Grunde legte, mußte, hatte man zunächst nachzuweisen, dass das Integral für jeden complexen Werth von x eine Bedeutung hatte, dass also die hierdurch für kleine Werthe von x definierte Function sich unbegrenzt fortsetzen ließe, ferner dass das Integral unendlich viele, aber nur in zwei Gruppen zerfallende Werthe annehmen konnte, darauf dass sich die einer Gruppe angehörenden Werthe nur um Vielfache gewisser Constanten unterscheiden. Man hätte nun zwar schon damals, obgleich man von den bestimmten Integralen mit complexen Grenzen noch wenig wusste, diese Functionen für complexe Werthe definieren u. auch zeigen können, dass man durch Hinzufügen gewisser Constanten neue Werthe der Function erhält. Viel schwieriger aber wäre es gewesen, nachzuweisen, dass man auf diese Weise alle Werthe, welche sie erhalten kann, auch wirklich erhält. Aber selbst wenn man den Integrationsweg so ausgewählt hätte, dass dieses der Fall gewesen wäre, so hätte man den Beweis der damals als sehr unwahrscheinlich ersche-

nenden Theoreme zu führen gehabt, dass trotzdem
 zu diesen unendlich vielen Werthen von x nur ein
 einziger Werth von y gehört. Jacobi sagt ausdrücklich,
 dass gerade diese Schwierigkeit es ihm unmög-
 lich gemacht habe, in seinen Vorlesungen von
 den Integralen auszugehen, u. dass er deshalb sei-
 nen Ausgangspunkt von den J -Functionen ge-
 nommen habe. Aber diese Schwierigkeit fällt weg,
 wenn man von vornherein ganz allgemein die
 Existenz eines Additionstheorems beweisen kann,
 das hieraus unmittelbar, ganz unabhängig von
 der Theorie der Integrale, folgt, dass die J -Functionen,
 für welche dasselbe existirt, eindeutige Functionen
 sind. Zu diesem Zwecke behandeln wir
 jetzt die allgemeine Transformation der ellipti-
 schen Integrale; wir stellen uns also die Auf-
 gabe die Differentialgleichung $(\frac{dx}{du})^2 = R(x)$ zu trans-
 formiren in $(\frac{ds}{du})^2 = 4s^3 - g_2s - g_3$ mit der Bedingung,
 dass $s = \infty$ werde für einen gegebenen Werth x von x
 u. dass zugleich \sqrt{s} ein vorgeschriebenes Zeichen er-
 halte. Euler, der diese Transformation zuerst
 machte, ging aus von der in x u. s quadratischen
 Gleichung:

$$37) (l'x^2 + mx + n)s^2 + (l'x^2 + m'x + n')s + (l''x^2 + m''x + n'') = 0$$

oder:

$$38, \quad Ls^2 + Ms + N = L'x^2 + M'x + N' = 0$$

hieraus folgt:

$$39, \quad (2Ls + M)ds + (2L'x + M')dx = 0$$

ferner folgt aus (38):

$$(2Ls + M)^2 = M^2 - 4LN = k^2 R(x)$$

$$40) \quad (2L'x + M')^2 = M'^2 - 4L'N' = k^2 R_1(s)$$

worin k eine willkürliche Constante u. $R(x)$ u. $R_1(s)$ Funktionen vierten Grades resp. von x u. s allein sind. Ein Wert der Quadratwurzel ist bisher bestimmt durch:

$$k\sqrt{R(x)} = 2Ls + M$$

$$k\sqrt{R_1(s)} = 2L'x + M'$$

u. somit geht unsere Differentialgleichung (39) über in:

$$41) \quad \frac{dx}{\sqrt{R(x)}} + \frac{ds}{\sqrt{R_1(s)}} = 0$$

Demit nun $\frac{ds}{\sqrt{R_1(s)}}$ die gewünschte Form erhalte, müssen wir über die vorkommenden Constanten passende verfügen. In der Gleichung (37) kommen zwar 9 Constanten vor, doch können dieselben auf 8 reduziert werden, da man die ganze Gleichung durch einen der Coefficienten dividieren kann.

Außerdem kommt noch die willkürliche Constante k vor, so dass also im Ganzen 9 Constanten zu bestimmen sind. Dazu erhält man aber auch gerade 9 Bedingungen. Soll nämlich $R(x)$ eine vorgeschriebene allgemeine Function vierten Grades werden, so

liefert dies 5 Bedingungen. Damit ferner $R_1(s)$ die Form $4s^4 - g_2s - g_3$ annehme, müssen die Coefficienten von s^4 u. s^2 gleich 0 u. der von s^3 gleich 4 sein; dies gibt drei weitere Bedingungen, u. endlich kommt noch die letzte Bedingung hinzu, dass $s = \infty$ werden solle, wenn x einen vorgeschriebenen Werth x_0 u. die zugehörige Wurzel $\sqrt{R(x)}$ ein vorgeschriebenes Zeichen hat. Also im Ganzen 9 Bedingungen. Euler verfügte über die 9 Constanten so, dass die beiden Functionen $R(x)$ u. $R_1(s)$ in ihren Coefficienten identisch wurden u. überdies für einen gegebenen Werth von x auch s einen gegebenen Werth annahm, u. kann so ohne Weiteres auf das Additionstheorem der elliptischen Integrale.

Setzt man nun in:

$$R^2 R_1(s) = M'^2 - 4L'L'$$

für M' L' L' ihre Werthe in s ein, ordnet dann nach Potenzen von s , so wird, da der Coefficient von s^4 gleich 0 sein soll:

$$4g_2, m^2 - 4ln = 0.$$

Ist nun $l(=)0$, so können wir $l=1$ setzen, da man alsdann die Gleichung (37) durch l dividiren kann, u. es wird der Coefficient von s^2 z.h. $L' = lx^2 + mx + n$ ein vollständiges Quadrat, also etwa:

$$L' = (x - x_0)^2$$

Ist dagegen $l = 0$, so ist auch $m = 0$ u. man kann dann $k = 1$ setzen. Diesen Fall beschreiben wir auf später. Im ersten Falle wird also:

$$k^2 R(x) = M^2 - 4(x-x_0)^2 A$$

d.h. Die Differenz $M^2 - k^2 R(x)$ muß durch $(x-x_0)^2$ theilbar sein. Wir ordnen deshalb M u. $R(x)$ gleich nach Potenzen von $(x-x_0)$ u. setzen:

$$M = m_0 + m_1(x-x_0) + m_2(x-x_0)^2$$

$$40) \quad R(x) = r_0 + r_1(x-x_0) + r_2(x-x_0)^2 + r_3(x-x_0)^3 + r_4(x-x_0)^4$$

mithin wird:

$$M^2 - k^2 R(x) = (m_0^2 - k^2 r_0) + (2m_0 m_1 - k^2 r_1)(x-x_0) + (m_1^2 + 2m_0 m_2 - k^2 r_2)(x-x_0)^2 + (2m_1 m_2 - k^2 r_3)(x-x_0)^3 + (m_2^2 - k^2 r_4)(x-x_0)^4$$

Da nun diese Differenz durch $(x-x_0)^2$ theilbar sein soll, so muß sein:

$$44) \quad \begin{aligned} m_0^2 - k^2 r_0 &= 0 & \text{also:} & & m_0 &= k \sqrt{r_0} \\ 2m_0 m_1 - k^2 r_1 &= 0 & & & m_1 &= k \frac{r_1}{2\sqrt{r_0}} \end{aligned}$$

ferner setzen wir noch:

$$43) \quad A = n_0(x-x_0)^2 + n_1(x-x_0) + n_2$$

u. erhalten dann, wenn wir die Gleichung $Ls^2 + Ms + A = 0$ nach Potenzen von $(x-x_0)$ ordnen:

$$(x-x_0)^2(s^2 + m_1 s + n_2) + (x-x_0)(m_0 s + n_1) + m_0 s + n_0 = 0$$

u. daher:

$$45) \quad k^2 R_1(s) = (m_1 s + n_1)^2 - 4(m_0 s + n_0)(m_2 s + n_2 + s^2)$$

Es ist also in der That $R_1(s)$ nur noch vom dritten Grade. Damit nun hierin der Coefficient von s^3

gleich 4 sei, muß sein:

$$m_0 = -k^2$$

woraus folgt: $k^2 = r_0$ u. daher:

$$4b, \quad m_0 = -r_0$$

$$m_1 = -\frac{r_1}{2}$$

ferner soll der Coefficient von s^2 gleich 0 sein, also:

$$m_1^2 - 4m_0m_2 - 4r_0 = 0$$

Vergleicht man ferner noch in $M^2 - k^2 R(x) = 4(x-x_0)^2 N$

die Coefficienten von $(x-x_0)^2$ so erhält man:

$$m_1^2 + 2m_0m_2 + m_0r_2 - 4r_0 = 0$$

Aus diesen beiden Gleichungen folgt:

$$4b, \quad m_2 = -\frac{r_2}{6}$$

Es folgt:

$$M = -r_0 - \frac{1}{2}r_1(x-x_0) - \frac{1}{6}r_2(x-x_0)^2$$

$$4N = \frac{(r_0 + \frac{1}{2}(x-x_0)r_1 + \frac{1}{6}r_2(x-x_0)^2) - r_0 R(x)}{(x-x_0)^2}$$

$$= (\frac{1}{4}r_1^2 - \frac{2}{3}r_0r_2) + (\frac{1}{6}r_1r_2 - r_0r_3)(x-x_0) + (\frac{1}{36}r_2^2 - r_0r_4)(x-x_0)^2$$

Folglich ist:

$$n_0 = \frac{1}{16}r_1^2 - \frac{1}{6}r_0r_2$$

$$n_1 = \frac{1}{24}r_1r_2 - \frac{1}{4}r_0r_3$$

$$n_2 = \frac{1}{144}r_2^2 - \frac{1}{4}r_0r_4$$

Da nun noch

$$-r_0q_2 = 2m_1n_1 - 4m_0n_2 - 4r_0m_2$$

$$-r_0q_1 = n_1^2 - 4n_0n_2$$

ist, so wird:

$$g_2 = r_0 r_4 + \frac{1}{12} r_2^2 - \frac{1}{4} r_1 r_3$$

$$g_3 = \frac{1}{48} r_1 r_2 r_3 - \frac{1}{16} r_0 r_3^2 - \frac{1}{216} r_2^3 - \frac{1}{16} r_1^2 r_4 + \frac{1}{6} r_0 r_2 r_4$$

Nun ist aber:

$$r_0 = R(x_0) = R(x_0)$$

$$r_1 = R'(x_0) = 4 R_1(x_0)$$

$$r_2 = \frac{1}{2} R''(x_0) = 6 R_2(x_0)$$

$$r_3 = \frac{1}{6} R'''(x_0) = 4 R_3(x_0)$$

$$r_4 = \frac{1}{24} R^{(4)}(x_0) = R_4(x_0)$$

Hieraus werden die Werthe von g_2 u. g_3 :

$$g_2 = R(x_0) \cdot R_4(x_0) - 4 R_1(x_0) \cdot R_3(x_0) + 3 R_2^2$$

$$g_3 = R(x_0) \cdot R_2(x_0) R_4(x_0) + 2 R_1(x_0) \cdot R_2(x_0) \cdot R_3(x_0) - R(x_0) \cdot R_1^2(x_0) - R_4(x_0) R_1^2(x_0) - R_2^3(x_0).$$

Dies sind aber genau dieselben Ausdrücke, die wir oben pag (8) für g_2 u. g_3 erhalten u. von denen wir nachgewiesen haben, dass sie von x u. somit auch von x_0 vollständig unabhängig sind. Später erhalten wir für diese Invarianten dieselben Werthe, wie dort, u. somit:

$$g_2 = A A' - 4 B B' + 3 C^2$$

$$g_3 = A C A' + 2 B C B' - A B'^2 - A' B^2 - C^3.$$

Hiermit ist die Funktion $R_1(s)$ vollständig bestimmt u. zwar von der gewöhnlichen Form $4s^3 - g_2 s - g_3$. Es handelt sich nur noch darum den Werth von s ausgedrückt in x , zu finden. Nun war:

$$2 L s + M = k \sqrt{R(x)}$$

mithin da $\xi = (x - x_0)^2$, $\kappa = \sqrt{\tau_0} = \sqrt{R(x_0)}$ ist:

$$48) \quad s = \frac{-M + \sqrt{R(x_0)} \sqrt{R(x)}}{2(x - x_0)}$$

dabei ist:

$$49^a) \quad -M = R(x_0) + 2R_1(x_0)(x - x_0) + R_2(x_0)(x - x_0)^2$$

oder:

$$49^b) \quad -M = Ax^2 + 2Bxx_0 + Cx_0^2 + 2B'(x + x_0) + A' + C(x - x_0)^2.$$

Hieraus folgt, dass auch die Bedingung erfüllt ist, dass für den beliebig gegebenen Werth x_0 von x $s = \infty$ werden sollte, u. zwar geschieht dies nur für den einen einzigen Werth $x = x_0$. Es bleibt also nur noch das Zeichen von $\sqrt{4s^2 - g_2s - g_3}$ zu bestimmen. Dies geschieht am einfachsten, wenn man die Ableitung $\frac{ds}{dx}$ bildet. Dann bringen wir aber den Ausdruck für s zuerst auf die Form:

$$48^a) \quad s = \frac{1}{4} \left(\frac{\sqrt{R(x)} + \sqrt{R(x_0)}}{x - x_0} \right)^2 - \frac{1}{4} A(x + x_0)^2 - B(x + x_0) - C$$

u. hieraus folgt nach einiger Berechnung:

$$50, \quad -\sqrt{R(x)} \frac{ds}{dx} = \sqrt{4s^2 - g_2s - g_3} = \left(\frac{R(x)}{(x - x_0)^2} - \frac{\frac{1}{4} R'(x)}{(x - x_0)} \right) \sqrt{R(x_0)} - \left(\frac{R(x_0)}{(x_0 - x)^2} - \frac{\frac{1}{4} R'(x_0)}{(x_0 - x)} \right) \sqrt{R(x)}$$

Hierdurch ist der Werth der Wurzel $\sqrt{4s^2 - g_2s - g_3} = \sqrt{S}$ bestimmt. Dabei ist den beiden Wurzeln $\sqrt{R(x)} = \sqrt{R(x_0)}$ dasselbe Zeichen u. zwar dasjenige beizulegen, welches $\sqrt{R(x)}$ in der ursprünglichen Gleichung hat. Wäre nämlich für $x = x_0$ $\sqrt{R(x)} = -\sqrt{R(x_0)}$ so würde wie aus Gl. hervorgeht, s nicht unendlich groß werden. Mithin können wir das Resultat folgendermaßen zusammen-

fassen:

Soll die Differentialgleichung:

$$\left(\frac{dx}{du}\right)^2 = Ax^4 + 4Bx^3 + 6Cx^2 + 4Dx + A' = R(x)$$

in eine andere von der Form:

$$\frac{ds}{du} = -\sqrt{4s^3 - g_2 s - g_3} = -\sqrt{S}$$

unter der Bedingung übergeführt werden, dass für einen vorgezeichneten Werth der zugehörigen Ansatzwurzel $s = \infty$ werde, so setze man für s den Ausdruck (48), berechne die Invarianten g_2 u. g_3 aus den Gleichungen (47) u. bestimme den Werth von \sqrt{S} aus der Gleichung (50), in welcher $\sqrt{R(x)} = \sqrt{R(x_0)}$ dasselbe Zeichen besitzen.

Ueber diese für die elliptischen Integrale charakteristische Transformation sei noch Folgendes bemerkt:

1) Der früher pag. 11. behandelte Fall, dass x_0 eine der Wurzeln der Gleichung $R(x) = 0$ sei, ist natürlich hierin enthalten. Denn setzt man $R(x_0) = 0$, $x_0 = \alpha$, so wird, wie aus (48) mit Hilfe von (49^a) folgt:

$$s = \frac{1}{2} R_2(\alpha) + \frac{R_1(\alpha)}{x - \alpha}$$

$$s = \frac{\frac{1}{4} R'_1(\alpha)}{x - \alpha} + \frac{1}{24} R''_1(\alpha)$$

$$\sqrt{S} = -\frac{\frac{1}{4} R'_1(\alpha)}{(x - \alpha)^2} \sqrt{R(x)} \quad \text{oder} \quad \sqrt{R(x)} = -\frac{\frac{1}{4} R'_1(\alpha)}{(s - \frac{1}{24} R''_1(\alpha))^2} \sqrt{S},$$

also genau dieselben Formeln wie pag. 11.

2) Wir hatten oben den speziellen Fall unberücksichtigt gelassen, wo $l = m = 0$ war. Dann ist $x_0 = \infty$,

Dies folgt daraus, dass x_0 für den Fall $m^2 - 4ln = 0$ die Wurzel der Gleichung $P = lx^2 + mx + n = 0$ war, da sich nun diese für $l=0$ $m=0$ um zwei Einheiten in ihrem Grade erniedrigt, so muß für diesen Fall die Wurzel x_0 unendlich groß sein. Wir erhalten dann aus (48) u. (50) die für diesen Fall geltenden Formeln durch einen einfacheren Grenzübergang, sobald wir den Werth von $\lim_{x_0 \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{R(x_0)}}{x_0} = \pm \sqrt{A}$ bestimmt haben. Nehmen wir diesen gleich $+\sqrt{A}$ an, so erhalten wir:

$$51. \begin{cases} S = \frac{\sqrt{A} \sqrt{R(x)}}{2} + \frac{1}{2} (Ax^2 + 2Bx + C) \\ \sqrt{S} = -\frac{1}{4} \sqrt{A} R'(x) + (Ax + B) \sqrt{R(x)} \end{cases}$$

Diese Formeln haben zu weitläufigen Rechnungen Veranlassung gegeben. Sie können nämlich zur Anwendung, wenn die Wurzeln der Gleichung $R(x)=0$ reinlich imaginär sind, während $R(x)$ selbst reelle Coefficienten hat. Die Functionen p u. u sind dann für reelle Werthe von x ebenfalls reell. Läßt man daher in dem Integral:

$$u = \int \frac{dx}{\sqrt{R(x)}}$$

x nur reelle Werthe durchlaufen, so kann $R(x)$ niemals sein Zeichen wechseln u. es wird somit für reelle Werthe von x durch jenes Integral eine reelle Function definiert, die aus unseren Transformationsformeln sofort zu entnehmen ist.

Wendet man aber die gebrochenen Substitutionsformeln oder die lineare Transformation an, so kommen in allen diesen Formeln imaginäre Konstanten vor u. man hat, da das Resultat gleichwohl ein reelles ist, erst beträchtliche Rechnungen anzustellen, um es auf diese Form zu bringen.

3, Aus den Formeln (51) folgen auch unmittelbar die Formeln (16) für den Fall, dass $t=0$ u. $x=x_0$ ist, nämlich:

$$s = Bx + \frac{1}{2}C$$

$$\sqrt{s} = B \sqrt{R(x)}$$

4, Es läßt sich zwar immer auch x ausdrücken durch s u. \sqrt{s} , wie aus den allgemeinen Transformationsformeln ersichtlich ist, jedoch werden diese Ausdrücke etwas complicirt, u. außerdem sind dieselben von nur geringer praktischer Bedeutung, da sie selten gebraucht werden.

5, Wir wollen noch einen synthetischen Beweis für unsere Formeln geben. Nehmen wir nämlich:

$$K = R(x, x_0)$$

so besitzt diese Funktion folgende Eigenschaften:

$$R(x, x) = R(x)$$

$$\left(\frac{\partial R(x, x_0)}{\partial x} \right)_{x_0=x} = \frac{1}{2} \frac{\partial R(x)}{\partial x}$$

Daraus aber folgt ohne Weiteres, dass der Ausdruck:

$$52) \quad R^2(x, x_0) - R(x_0) \cdot R(x) = 4(x-x_0)^2 \bar{R}(x, x_0)$$

Durch $(x-x_0)^2$ theilbar sein mufs. In der That ist $\bar{R}(x, x_0)$ eine ganze Funktion, nämlich:

$$\begin{aligned} \bar{R}(x, x_0) = & (B^2 - AC)x^2x_0^2 + (BC - AB')xx_0(x+x_0) + \frac{1}{4}(C^2 - A^2A')(x+x_0)^2 \\ & + 2(C^2 - BB')xx_0 + (B'C - A'B)(x+x_0) + B'^2 - A'C. \end{aligned}$$

Nun ersetze die Formel für s :

$$s = \frac{R(x, x_0) + \sqrt{R(x)} \sqrt{R(x_0)}}{2(x-x_0)^2}$$

woraus folgt:

$$(2s(x-x_0)^2 - R(x, x_0))^2 = R(x) \cdot R(x_0)$$

n. Differenz wegen Gl. (52)

$$53) \quad s^2(x-x_0)^2 - sR(x, x_0) + \bar{R}(x, x_0) = 0$$

Hiermit ist aber im Wesentlichen der Beweis geliefert. Denn vermöge dieser Gleichung sehen wir, dass zwischen s u. x eine Gleichung besteht, welche in Bezug auf beide vom zweiten Grade ist. Ordnen wir diese nach Potenzen von x , also:

$$Lx^2 + Mx + N = 0$$

n. setzen dann:

$$M^2 - 4LN = k^2 R(x_0) = R(x_0)S,$$

so erhalten wir hieraus S unmittelbar in der gewünschten Form. Daher auch sofort g_2 u. g_3 ausgedrückt durch die Coefficienten der gegebenen Funktion $R(x)$.

Dieses letztere Verfahren, welches an dem gegebenen Ausdruck (48) für s anknüpft, setzt aber eine genau

ere Kenntniss der Theorie der Formen vierten Grades voraus. Ist man nämlich in dieser auf den Ausdruck (48) gekommen, so wird man denselben auch, wie hier geschieht, vermöge der ihm eigen thümlichen Eigenschaften unmittelbar zur Transformation der elliptischen Integrale verwenden können.

Wir gehen jetzt noch einmal auf die Darstellung von $x = \varphi(u)$ durch \wp -Functionen zurück.

Es war:

$$(54) \quad \varphi(u) - \varphi(u_0) = C \frac{\wp(u - u_0) \wp(u + u_0 - u_1 - u_2)}{\wp(u - u_1) \wp(u - u_2)}$$

Ist die Function $R(x)$ gegeben, so sind damit 5 Constanten bekannt, außerdem muß noch eine gewisse Integrationsconstante n der zugehörige Werth der Quadratwurzel gegeben sein, wenn die Lösung der Differentialgleichung eine vollständig bestimmte sein soll. Es sind also im Ganzen 6 Constanten gegeben. Nun kommen in Formel (54) als Constanten vor einmal die beiden Invarianten der \wp -Functionen, sodann die Größen u_0, u_1, u_2 u. C , also ebenfalls 6 Constanten, es muß daher möglich sein, die letzteren durch die gegebenen auszu drücken. Als willkürliche Constante wollen wir einen der Werthe nehmen, wofür $\varphi(u) = \infty$ wird, z. B. u_1 , den man ja stets festsetzen kann,

Dass die Function unendlich groß werden sollte für einen beliebig vorgeschriebenen Werth von u , es bleiben dann noch $u, u, \dots C$ durch u, u . Die Coefficienten von $R(x)$ zu bestimmen, da die Bestimmung der Invarianten y_2 u. y_3 bereits ausgeführt ist. Soll nun $s = \infty$ werden für $x = \infty$, so bestimmt sich s durch die Formel:

$$s = \frac{1}{2} \sqrt{A} \sqrt{R(x)} + \frac{1}{2} (Ax^2 + 2Bx + C)$$

55) $\sqrt{S} = -\frac{1}{4} \sqrt{A} R'(x) - (Ax + B) \sqrt{R(x)}.$

Mittels dieser Substitutionen wird $du = \frac{dx}{\sqrt{R(x)}}$ übergeführt in $du = -\frac{ds}{\sqrt{S}}$. Diese Gleichung bestimmt daher eine Function p , welche an derselben Stelle wie x u. für $u = u$, unendlich wird. Mithin ist:

$$s = \frac{1}{2} \sqrt{A} \sqrt{R(x)} + \frac{1}{2} (Ax^2 + 2Bx + C) = p(u - u_1)$$

55^a) $\sqrt{S} = -\frac{1}{4} \sqrt{A} R'(x) - (Ax + B) \sqrt{R(x)} = -p'(u - u_1)$

Nun ist für große Werthe von x :

$$\sqrt{R(x)} = \sqrt{A} x^2 \left(1 + \frac{4B}{A} x^{-1} + \frac{4C}{A} x^{-2} + \frac{4B'}{A} x^{-3} + \frac{A'}{A} x^{-4} \right)^{\frac{1}{2}}$$

oder nach dem binomischen Satze entwickelt:

$$\begin{aligned} \sqrt{R(x)} &= \sqrt{A} x^2 + \frac{2B}{\sqrt{A}} x + \frac{3C}{\sqrt{A}} + \frac{2B'}{\sqrt{A}} x^{-1} + \dots \\ &\quad - \frac{2B^2}{A\sqrt{A}} - \frac{6BC}{A\sqrt{A}} x^{-1} - \dots \\ &\quad + \frac{4B^3}{A^2\sqrt{A}} x^{-1} + \dots \end{aligned}$$

$$56) \sqrt{R(x)} = \sqrt{A} x^2 + \frac{2B}{\sqrt{A}} x + \frac{3AC - 2B^2}{A\sqrt{A}} + \frac{2A^2B' - 6BCA + 4B^3}{A^2\sqrt{A}} x^{-1} + \dots$$

Nehmen wir an, dass u , derjenige Werth von u sei, für welchen $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{R(x)}}{x^2} = +\sqrt{A}$ wird, so wird dem Werthe $u = u_2$, für welchen x ebenfalls unendlich groß wird, der Grenzwert $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{R(x)}}{x^2} = -\sqrt{A}$ entsprechen müssen. Lehren wir daher in vorstehender Entwicklung statt $\sqrt{A} - \sqrt{A}$, substituieren dann den sich ergebenden Werth von $\sqrt{R(x)}$ in den Werth von S u. lassen dann $x = \infty$ werden, so erhalten wir den Werth von S für $u = u_2$, d.h. also den Werth von $p(u_2 - u_1)$. Dies gibt:

$$57, \quad p(u_2 - u_1) = \frac{B^2 - AC}{A}$$

Hierdurch ist jedoch der Werth von u_2 noch nicht vollständig bestimmt, vielmehr müssen wir noch wissen, welches Zeichen $p'(u - u_1)$ für $u = u_2$ erhält. Dazu setzt man obige Entwicklung (nachdem darin $-\sqrt{A}$ statt \sqrt{A} gesetzt ist) in den Werth von \sqrt{S} ein u. setzt dann dann $x = \infty$. Dadurch erhält man:

$$57, \quad p'(u_2 - u_1) = \frac{A^2 B' - 3ABC + 2B^3}{A\sqrt{A}}$$

Hierdurch ist nun auch nachdem das Vorzeichen von \sqrt{A} so wie angegeben fixirt worden ist, das Vorzeichen von $p'(u_2 - u_1)$ bestimmt, u. somit die Aufgabe, u_2 aus den Coefficienten von $R(x)$ u. die gegebene Constante u_1 zu berechnen, auf die

in der Theorie vollständig gelöste Aufgabe erwünscht, ein Argument zu finden, für welches p einen gegebenen Werth u , zugleich $p'u$ ein vorgeschriebenes Zeichen erhält. u_0 ist einer der beiden Werthe von u , für welche $\varphi(u) - \varphi(u_0) = 0$ also $\varphi(u) = \varphi(u_0)$ wird. Ist dieser Werth $x_0 = \varphi(u_0)$ gegeben z. B. $\varphi(u_0) = 0$, so erhält man aus Gl. (55^a) den Werth von $p(u - u_0)$, wenn man darin x_0 an die Stelle von x setzt u. kann somit auch u_0 aus x_0 u. den Coefficienten von $R(x)$ berechnen. Es bleibt somit nur noch die Bestimmung der Constanten C übrig. Dies lässt sich in folgender Weise ausführen:

Setzt man nämlich $A(=) 0$, so ist:

$$\varphi(u) - \varphi(u_0) = C \frac{\wp(u - u_0) \wp(u + u_0 - u_1 - u_2)}{\wp(u - u_1) \wp(u - u_2)}$$

Entwickelt man dies nach Potenzen von $u - u_1$, so wird:

$$\varphi(u) - \varphi(u_0) = C \frac{\wp(u_1 - u_0) \wp(u_0 - u_2)}{\wp(u_1 - u_2)} (u - u_1)^{-1} + \dots$$

Setzt man ferner in der Differentialgleichung $(\frac{dx}{du})^2 = R(x)$ statt x $\frac{1}{x_1}$, so geht dieselbe über in:

$$(\frac{dx_1}{du})^2 = A'x_1^4 + B'x_1^3 + 6Cx_1^2 + Bx_1 + A$$

welche jetzt zu integrieren ist, dass für $u = u_1$, $x_1 = 0$ wird. Hieraus folgt für x_1 die Entwicklung (sfr. pag. der Theorie der ell. Functionen):

$$x_1 = \pm \sqrt{A'}(u - u_1) + \dots$$

u. Daraus:

$$x = \pm \frac{1}{\sqrt{A}} (u - u_1)^{-1} + \dots, \text{ also}$$

$$\frac{dx}{du} = \mp \frac{1}{\sqrt{A}} (u - u_1)^{-2} + \dots$$

hieraus folgt:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{dx}{du} = \mp \sqrt{A}.$$

Man sollte aber nach unserer Festsetzung u , denjenigen Werth sein, für welchen sich dieser Ausdruck dem Werthe $+\sqrt{A}$ nähert, mithin haben wir zu setzen

$$\frac{dx}{du} = + \frac{1}{\sqrt{A}} (u - u_1)^{-2} + \dots, \text{ also } x = - \frac{1}{\sqrt{A}} (u - u_1)^{-1} + \dots$$

Durch Vergleichung der Entwicklungen von x u. y ergibt sich:

$$C = \frac{\sigma(u_1 - u_0)}{\sqrt{A} \sigma(u_0 - u_1) \sigma(u_0 - u_2)}$$

Wolglich:

$$58) \quad \varphi(u) - \varphi(u_0) = \frac{\sigma(u_1 - u_1) \sigma(u - u_0) \sigma(u + u_0 - u_1 - u_2)}{\sqrt{A} \sigma(u_0 - u_1) \sigma(u_0 - u_2) \sigma(u - u_1) \sigma(u - u_2)}$$

Hierin sind nach dem Vorhergehenden die Größen $u_1 - u_2$, $u_0 - u_1$, $u_0 - u_2$ als bekannt anzusehen. Die Formel verliert offenbar ihre Gültigkeit, wenn $A=0$ ist. Ist aber letzteres der Fall, so wird $u_2 \equiv u_1$, u. wir können schreiben:

$$\varphi(u) - \varphi(u_0) = C, \frac{\sigma(u - u_0) \sigma(u + u_0 - 2u_1)}{\sigma^2(u - u_1)}$$

Dies gibt nach Potenzen von $u - u_1$ entwickelt:

$$\varphi(u) - \varphi(u_0) = C, \sigma(u_1 - u_0) \sigma(u_0 - u_1) (u - u_1)^{-2} + \dots$$

Andererseits ist in dem Falle, wo $A = 0$ ist u. $s = \infty$ werden soll für $x = \infty$:

$$s = Bx + \frac{1}{2}C \quad \text{also}$$

$$x = \frac{1}{B}s - \frac{1}{2}\frac{C}{B} = \frac{1}{B}p(u-u_1) - \frac{1}{2}\frac{C}{B}$$

mithin

$$x = \frac{1}{B}(u-u_1)^{-2} + \dots$$

Durch Vergleichung beider Entwicklungen ergibt sich wieder:

$$C = -\frac{1}{B} \frac{1}{\sigma^2(u_0-u_1)}$$

Folglich:

$$59) \quad \varphi(u) - \varphi(u_0) = -\frac{\sigma(u-u_0)\sigma(u+u_0-2u_1)}{B\sigma^2(u_0-u_1)\sigma^2(u-u_1)}$$

Hiermit sind die Formeln betreffend die Transformation resp. Integration der Differentialgleichung $(\frac{dx}{du})^2 = R(x)$ vollständig abgeleitet.

Wir schließen hieran noch einige Bemerkungen über die Auflösung der Gleichungen 4. Grades, wenn auch dieselben nicht direct mit dem Vorhergehenden zusammenhängen. Es kommt uns nämlich darauf an, zu wissen, wann die Wurzeln der Gleichung $R(x) = 0$ reell, wann imaginär sind, da sich hieraus auch die Größen C d.h. die Wurzeln der Gleichung $S = 0$ richten. Die letzteren sind nämlich reell nicht nur in dem Falle, wo die Wurzeln von $R(x) = 0$ sämtlich reell sind, sondern auch noch, wenn diese sämtlich imaginär sind, dagegen sind zwei der Größen C conjugirt complex, die

Dritte reell, wenn 2 der Wurzeln von $R(x)=0$ reell, die beiden anderen konjugiert komplex sind. Transformiert man eine Gleichung mit reellen Koeffizienten durch eine reelle lineare Substitution, so wird offenbar die transformierte Gleichung genau so viele reelle u. imaginäre Wurzeln haben, als die ursprüngliche. Dies scheint darauf hinzuweisen, dass sich die Bedingungen für die Existenz einer gewissen Anzahl von reellen Wurzeln ausdrücken lassen durch die Invarianten der gegebenen Gleichung d.h. durch Größen, welche durch eine solche lineare Transformation nicht geändert werden. Invarianten in diesem Sinne sind für die Formen vierten Grades nur die Ausdrücke für g_2, g_3 , die wir gehabt haben. Wir werden sogleich sehen, in wie weit die vorige Behauptung richtig ist.

Nennt man die Wurzeln der Gleichung:

$$60) \quad R(x) = Ax^4 + 4Bx^3 + 6Cx^2 + 4Dx + A = 0$$

x_1, x_2, x_3, x_4 , so dass also:

$$R(x) = A(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)$$

ist, so gibt es unter den verschiedenen Auf Lösungsmethoden eine, welche diese Gleichung direkt auf eine kubische Gleichung in reduzierter Form zurückführt.

Seht man nämlich:

$$\xi_1 - \xi_0 = \frac{1}{4} A (x_1 - x_3)(x_2 - x_4)$$

$$61) \quad \xi_1 - \xi_2 = \frac{1}{4} A (x_1 - x_4)(x_2 - x_3)$$

$$\xi_2 - \xi_3 = \frac{1}{4} A (x_1 - x_2)(x_3 - x_4)$$

oder:

$$\begin{aligned}
 \xi_1 &= \frac{1}{12} A ((x_1 - x_3)(x_2 - x_4) + (x_1 - x_4)(x_2 - x_3)) \\
 62, \quad \xi_2 &= \frac{1}{12} A ((x_1 - x_2)(x_3 - x_4) - (x_1 - x_4)(x_2 - x_3)) \\
 \xi_3 &= \frac{1}{12} A (-(x_1 - x_2)(x_3 - x_4) - (x_1 - x_3)(x_2 - x_4))
 \end{aligned}$$

u. permutirt hierin die GröÙen x_1, x_2, x_3, x_4 auf alle mögliche Weise, so erhält man im Ganzen nur 3 verschiedene Ausdrücke, welche bezüglich gleich den Werthen von ξ_1, ξ_2, ξ_3 sind. Es sind somit ξ_1, ξ_2, ξ_3 die drei Wurzeln einer kubischen Gleichung, welche wegen der Relation $\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 = 0$ die Form hat:

$$4\xi^3 - g_2\xi - g_3 = 0$$

Hat man also diese Gleichung aufgelöst, so findet man aus ihren Wurzeln die Wurzeln der Gleichung $R(x) = 0$ mit Hilfe der Formeln (61). Mit diesen Größen ξ hängen nun sehr eng zusammen diejenigen Funktionen der vier Wurzeln x_1, x_2, x_3, x_4 , auf denen die Euler'sche Auflösung der biquadratischen Gleichungen beruht. Diese sind:

$$\begin{aligned}
 \eta_1 &= \frac{1}{4} A (x_1 + x_2 - x_3 - x_4) \\
 \eta_2 &= \frac{1}{4} A (x_1 - x_2 + x_3 - x_4) \\
 63, \quad \eta_3 &= \frac{1}{4} A (x_1 - x_2 - x_3 + x_4) \\
 -B &= \frac{1}{4} A (x_1 + x_2 + x_3 + x_4)
 \end{aligned}$$

u. aus diesen folgt:

$$\begin{aligned}
 Ax_1 &= -B + \eta_1 + \eta_2 + \eta_3 \\
 Ax_2 &= -B + \eta_1 - \eta_2 - \eta_3 \\
 64, \quad Ax_3 &= -B - \eta_1 + \eta_2 - \eta_3 \\
 Ax_4 &= -B - \eta_1 - \eta_2 + \eta_3
 \end{aligned}$$

Permutirt man in den Ausdrücken für y_1, \dots, y_3 die Größen x_1, \dots, x_4 auf jede mögliche Weise, so erhält man im Ganzen nur sechs verschiedene Werthe, von denen sich wiederum je zwei nur durch das Vorzeichen unterscheiden. Es sind mithin y_1^2, y_2^2, y_3^2 die drei Wurzeln einer in y^2 kubischen Gleichung u. zwar lautet dieselbe:

$$65) \quad 4y^6 - 12(B^2 - AC)y^4 + (12(B^2 - AC)^2 - A^2g_2)y^2 - (A^2B^2 - 3ABC + 2B^3)^2 = 0.$$

Zwischen den Wurzeln dieser Gleichung u. den Wurzeln der Gleichung $4\xi^3 - g_2\xi - g_3 = 0$ bestehen folgende einfache Relationen:

$$66) \quad \begin{aligned} y_1^2 &= B^2 - A(C - \xi_1) \\ y_2^2 &= B^2 - A(C - \xi_2) \\ y_3^2 &= B^2 - A(C - \xi_3) \end{aligned}$$

Hieraus geht hervor, dass zu jedem der ξ zwei gleiche aber entgegengesetzte Werthe der y gehören. Hat man also die Invarianten g_2 u. g_3 berechnet, so erhält man die Wurzeln der Gleichung $4\xi^3 - g_2\xi - g_3 = 0$, bestimme zu diesen die Größen y aus den Gleichungen (66) u. berechne dann die Wurzeln $x_1, x_2, \dots, x_3, x_4$ der gegebenen Gleichung aus den Formeln (64). Da aber für jedes y auch der entgegengesetzte Werth gewonnen werden kann, so würde man aus diesen Formeln acht verschiedene Werthe für die Wurzeln der Gleichung $R(x) = 0$ erhalten, was nicht möglich ist. Diese Schwierigkeit wird aber dadurch gehoben, dass zwischen den y eine Relation besteht, nemlich:

$$\eta_1 \eta_2 \eta_3 = \frac{1}{2} (A^2 B' - 3 A B C + 2 B^3)$$

Hat man daher für zwei der η das Zeichen willkürlich gewählt, so ist das des dritten durch vorstehende Gleichung bestimmt, u. es ergeben dann die Formeln (64) auch nur vier Werthe für die Wurzeln der Gleichung $R(x) = 0$.

Sind nun die Wurzeln x_1, x_2, x_3, x_4 sämtlich reell, so sind auch die drei η alle reell, also ihre Quadrate positiv reell. Umgekehrt wenn die Quadrate der η alle positiv u. reell sind, so sind die Größen η u. somit auch die Wurzeln x_1, x_2, x_3, x_4 reell. Sollen nun zunächst die Quadrate der η reell sein, so müssen die ξ reell sein u. dieses ist der Fall, wenn die Discriminante der kubischen Gleichung $4\xi^3 - 9\xi^2 - 9\xi - 9 = 0$ positiv ist d. h. es mindestens sein:

$$67) \quad 1, \quad 4g_2^3 - 27g_3^2 > 0$$

Sollen ferner die Quadrate der η positiv sein, so müssen in der Gleichung für η , dieselbe betrachtet als kubische Gleichung für η^2 sämtliche Coefficienten positiv sein, d. h. es müssen, da das constanten Glied von selbst diese Bedingung erfüllt, die weiteren zwei Bedingungen erfüllt werden:

$$67) \quad \begin{array}{l} 2, \quad B^2 - AC > 0 \\ 3, \quad 12(B^2 - AC)^2 - A^2 g_2 > 0 \end{array}$$

Die Ungleichungen 67. 1, 2, 3 geben die erwarteten

Bedingungen für die Realität der Wurzeln x, x_2, x_3, x_4 der gegebenen Gleichung $R(x) = 0$. Ist die Diskriminante (67.1) gleich 0, so sind zwei der Wurzeln ξ einander gleich, daher sind auch zwei der Größen η u. somit zwei Wurzeln der gegebenen Gleichung einander gleich. Ist sie negativ, so sind zwei der Größen ξ conjugirt complex, die dritte reell. Wenn wir dann unter ξ , die reelle Wurzel verstehen, so wird η ebenfalls reell sein, aber η_3 u. η_4 conjugirt complex, mithin werden auch zwei Wurzeln x, x_2 reell, die beiden anderen conjugirt complex sein. Ist aber die Diskriminante positiv, dagegen eine oder die beiden anderen Bedingungen nicht erfüllt, so sind sämtliche Wurzeln x, x_2, x_3, x_4 complex. Also:

- I Sind alle drei Bedingungen erfüllt, so sind sämtliche Wurzeln x, x_2, x_3, x_4 reell.
- II Sind die beiden letzten Bedingungen erfüllt, die erste aber nicht, so sind zwei dieser Wurzeln reell, zwei complex.
- III Ist die erste Bedingung erfüllt, von den beiden anderen aber entweder nur eine oder gar keine, so sind alle Wurzeln der gegebenen Gleichung complex.

Wir gehen nunmehr zu der bereits angefangenen Aufgabe des sphärischen Pendels zurück. Es war:

$$(68) \quad \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = \left(1 - \frac{z^2}{l^2}\right)(4gz + k) - \frac{k^2}{l^2} = R(z)$$

Die Coefficienten dieser Gleichung sind sämtlich reell. Ist nun für irgend einen Augenblick $t = t_0$ der zugehörige Werth von z z_0 , so muß $R(z_0)$ positiv sein, da $\left(\frac{dz}{dt}\right)^2$ positiv ist. Nun ist aber ferner:

$$R(+l) = - ; \quad R(-l) = - ; \quad R(-\infty) = +$$

Mithin besitzt die Gleichung $R(z) = 0$ drei reelle Wurzeln, welche bezüglich in den Intervallen liegen:

$$+l \dots z_0 ; \quad z_0 \dots -l ; \quad -l \dots -\infty .$$

Bezeichnen wir dieselben mit $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, wobei $\alpha_1 > \alpha_2 > \alpha_3$ sei, so ist:

$$69) \quad \begin{cases} R(z) = \frac{4g}{l^2} (z - \alpha_1)(z - \alpha_2)(z - \alpha_3) \\ +l > \alpha_1 > z_0 \\ z_0 > \alpha_2 > -l \\ -l > \alpha_3 > -\infty \end{cases}$$

Bei unserer Aufgabe muß nun z beständig zwischen den Grenzen α_1 u. α_2 liegen, dann überschreite z , während t stetig zunimmt, eine dieser beiden Grenzen, so würde $R(z)$ negativ werden, während es doch bei reellen Werthen von z positiv sein muß. Den Werth α_1 , sowohl als den Werth α_2 mißt aber z unendlich oft an. Dies kann man, ohne auf die Theorie der elliptischen Functionen zurückzugehen, wie folgt beweisen:

Es sei vorgelegt die Aufgabe, aus der Gleichung:

$$a, \quad \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = F(z),$$

in welcher $F(z)$ eine gegebene eindeutige Function von z u. die beiden Veränderlichen z u. t nur reelle Werthe annehmen sollen, z als Function von t zu bestimmen. Soll sich dabei z als periodische, stets endlich bleibende Function von t herzustellen, so müssen folgende Bedingungen erfüllt sein:

1, Es verschwindet $F(z)$ für zwei reelle Werthe a u. b von z .

2, Der Quotient $\frac{(a-z)(z-b)}{F(z)} = \frac{1}{F_1(z)}$ ändert sein Zeichen nicht u. wird nicht unendlich, so lange z zwischen den Grenzen a u. b liegt. In diesen Grenzen selbst besitzt $F_1(z)$ einen von 0 verschiedenen Werth.

3, Für irgend einen bestimmten Werth t_0 von t ist der zugehörige Werth z_0 von z in dem Intervalle $a \dots b$ enthalten.

Setzt man nun:

$$b, \quad z = \frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2} \cos v,$$

wo v eine reelle Veränderliche sein soll, so wird, wenn v alle Werthe von 0 bis π durchläuft, z alle Werthe von a bis b u. zwar jeden nur einmal annehmen. Durch diese Substitution geht die vorgelegte Gleichung über in:

$$c, \quad \left(\frac{dv}{dt}\right)^2 = F_1\left(\frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2} \cos v\right) = f(\cos v)$$

Es wird somit die Gleichung (a) sicher befriedigt werden, wenn man aus der vorstehenden Gleichung v als Function von t bestimmt u. dann z aus Gleichung (b) berechnet. Soll v mit wachsendem t auch zunehmen, so ist in der Gleichung:

$$d, \quad dt = \frac{dv}{\sqrt{f(\cos v)}}$$

der Quadratwurzel das positive Vorzeichen beizulegen. Dasselbe bleibt während der ganzen Bewegung unverändert, da für alle reellen Werthe von v zwischen $-\infty$ u. $+\infty$ zwischen den Grenzen a u. b liegt u. daher $F_1(z)$ oder $f(\cos v)$ niemals verschwinden oder unendlich groß werden kann. Setzt man nun:

$$e, \quad \varphi(v) = \int_0^v \frac{dv}{\sqrt{f(\cos v)}} = t - t_0$$

so ist $\varphi(v)$ eine für jeden reellen Werth von v definite Function, deren Ableitung nach t beständig positiv ist u. welche demnach, wenn v beständig zunehmend alle reellen Werthe von $-\infty$ bis $+\infty$ durchläuft, ebenfalls stetig wachsend von $-\infty$ bis $+\infty$ übergeht. Es wird daher auch t alle reellen Werthe von $-\infty$ bis $+\infty$ annehmen u. zwar so, dass jedem Werthe von v ein einziger Werth von t entspricht u. umgekehrt. Ferner werden unendlich kleinen Änderungen von t auch unendlich kleine Änderungen von v entsprechen. Es wird so-

mit durch die Gleichung (e) v als eine stetige Funktion von $t - \tau$ definiert, welche gleichzeitig mit t von $-\infty$ bis $+\infty$ läuft. Setzt man also:

$$f) \quad v = \varphi(t - \tau)$$

u. bestimmt dann τ aus der Gleichung:

$$g) \quad z = \frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2} \cos(\varphi(t - \tau)),$$

so ist hierdurch z als stetige Funktion von t definiert, welche der gegebenen Differentialgleichung (a) genügt. Dass dieser Ausdruck das allgemeine Integral dieser Differentialgleichung unter den gemeinten Voraussetzungen darstellt, lässt sich leicht dadurch zeigen, dass man nachweist, dass über die willkürliche Constante τ stets so verfügt werden kann, dass z einen vorgeschriebenen Werth $= \frac{dz}{dt}$ ein vorgeschriebenes Vorzeichen erhält. Nehmen wir dieses als bewiesen an, so folgt aus unserer Formel (g), dass nicht nur z für alle reellen Werthe von t beständig zwischen a u. b liegt, sondern dass auch z diese Grenzen unendlich oft erreicht, nämlich erstere für $v = 2n\pi$, letztere für $v = (2n+1)\pi$, unter n eine beliebige ganze Zahl verstanden. Aus der Definitionsgleichung:

$$\varphi(v) = \int_0^v \frac{dv}{\sqrt{f(\cos v)}}$$

geht man hervor:

$$\begin{aligned} \varphi(v + 2\pi) &= \int_0^{v+2\pi} \frac{dv}{\sqrt{f(\cos v)}} \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{dv}{\sqrt{f(\cos v)}} + \int_{2\pi}^{2\pi+v} \frac{dv}{\sqrt{f(\cos v)}} \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{dv}{\sqrt{f(\cos v)}} + \int_0^v \frac{dv}{\sqrt{f(\cos v)}} \end{aligned}$$

Setzt man also:

$$h), \quad \omega = \int_0^{\pi} \frac{dv}{\sqrt{f(\cos v)}}$$

so wird:

$$\varphi(v+2\pi) = \varphi(v) + 2\omega \quad \text{oder}$$

$$\varphi(v+2\pi) = t - \tau + 2\omega$$

$$i), \quad v+2\pi = \varphi(t-\tau+2\omega)$$

Ändert sich also t um die konstante Größe 2ω , so ändert sich v um 2π . Mithin ist z eine periodische Function von t , da sie ihren Werth nicht ändert, wenn man t um ein beliebiges Vielfache von 2ω vermehrt. n -mal wird z den Werth a annehmen, wenn $t = \tau + 2n\omega$ den Werth t , wenn $t = \tau + (2n+1)\omega$ ist. Hiermit ist die pag. ausgesprochene Behauptung bewiesen.

Da nun in unserer Aufgabe die drei Bedingungen pag. erfüllt sind, so folgt unmittelbar, dass durch die Differentialgleichung (68) z als eine periodische Function von t definiert wird. Um nun diese Function selbst aufzustellen, transformiren wir die gegebene Gleichung:

$$\left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = R(z) = \frac{4g}{f^2} (a_1 - z)(z - a_2)(z - a_3)$$

in die folgende:

$$\frac{ds}{dt} = -\sqrt{4s^3 - g_2 s - g_3}$$

mittels der Substitution:

$$70) \quad s = \frac{1}{4} \frac{R'(a_2)}{z - a_2} + \frac{1}{24} R''(a_2)$$

Berechnen wir nunmehr mit t denjenigen Werth von t , für welchen $z = a_2$, also $s = \infty$ wird, so wird

$$s = p(t - t_0)$$

$$71) \quad \frac{ds}{dt} = p'(t - t_0) = -\frac{1}{4} \frac{R'(a_2)}{(z - a_2)^2} \frac{dz}{dt}$$

Setzt man hierin $z = a_1$, so wird $\frac{dz}{dt} = 0$, also auch $p'(t - t_0) = 0$, d.h. es ist für $z = a_1$, $p(t - t_0)$ gleich einer der Größen l . Aufgleicher Weise verschwindet $p'(t - t_0)$, wenn man $z = a_3$ oder $z = \infty$ setzt.

Mithin erhalten wir:

$$l' = \frac{1}{4} \frac{R'(a_1)}{a_1 - a_2} + \frac{1}{24} R''(a_1)$$

$$72) \quad l'' = \frac{1}{4} \frac{R'(a_2)}{a_3 - a_2} + \frac{1}{24} R''(a_2)$$

$$l''' = \frac{1}{24} R''(a_2)$$

Was die Reihenfolge der l anlangt, sieht, da $\frac{R'(a_1)}{a_1 - a_2}$ positiv, $\frac{R'(a_2)}{a_3 - a_2}$ negativ ist, $l' > l'' > l'''$, mithin:

$$l' = l_1, \quad l'' = l_2, \quad l''' = l_3$$

Folglich:

$$l_1 - l_2 = \frac{1}{4} \frac{R'(a_1)}{a_1 - a_2} = \frac{g}{l^2} (a_2 - a_3)$$

$$73) \quad l_2 - l_3 = -\frac{1}{4} \frac{R'(a_2)}{a_3 - a_2} = \frac{g}{l^2} (a_1 - a_2)$$

$$l_1 - l_3 = (l_1 - l_2) + (l_2 - l_3) = \frac{g}{l^2} (a_1 - a_3)$$

Nun ist: $pu - l_1 = \frac{\sigma_1^2 u}{\sigma^2 u}$, mithin:

$$\frac{\sigma_1^2(t - t_0)}{\sigma^2(t - t_0)} = p(t - t_0) - l_1 = \frac{1}{4} R'(a_2) \frac{a_1 - z}{(z - a_2)(a_1 - a_2)}$$

$$\frac{\sigma_2^2(t - t_0)}{\sigma^2(t - t_0)} = p(t - t_0) - l_2 = \frac{1}{4} R'(a_2) \frac{1}{z - a_2}$$

$$\frac{\sigma_3^2(t - t_0)}{\sigma^2(t - t_0)} = p(t - t_0) - l_3 = \frac{1}{4} R'(a_2) \frac{a_3 - z}{(z - a_2)(a_3 - a_2)}$$

u. hieraus ergibt sich nun:

$$z - a_2 = \frac{1}{4} R'(\alpha_2) \frac{\sigma^2(t-t_0)}{\sigma_2^2(t-t_0)}$$

$$74) \quad \frac{\alpha_1 - z}{\alpha_1 - \alpha_2} = \frac{\sigma_1^2(t-t_0)}{\sigma_2^2(t-t_0)}$$

$$\frac{z - \alpha_2}{\alpha_2 - \alpha_3} = \frac{\sigma_3^2(t-t_0)}{\sigma_2^2(t-t_0)}$$

Hiermit ist nun z vollkommen bestimmt, doch werden wir weiter unten noch andere Formeln zur Berechnung von z angeben. Wir bemerken hier noch, dass z nur dann gleich ∞ werden kann, wenn $\sigma_2(t-t_0) = 0$ d.h. wenn $t \equiv t_0 + \omega_2$ ist, da aber t nur reelle Werthe annimmt, so erkennt man, dass während der ganzen Bewegung z stets endlich bleibt. Zugleich sieht man, dass z den Werth α_1 für $t \equiv t_0 + \omega$, den Werth α_2 für $t \equiv t_0$ annimmt, dass aber z niemals den Werth α_3 annehmen kann, da t stets reell bleiben soll.

Um nun auch $x + yi$ als elliptische Function von t auszudrücken, haben wir zunächst die Gleichg.

$$\begin{aligned} d \log(x + yi) &= \frac{-z dz + i k dt}{l^2 - z^2} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{dz + \frac{ik}{l} dt}{z + l} + \frac{dz - \frac{ik}{l} dt}{z - l} \right) \end{aligned}$$

auf eine integrable Form zu bringen. Dabei setzen wir zur Abkürzung $t - t_0 = u$. Setzen wir ferner $z = \varphi(u)$, so können wir vorstehende Gleichung auch so schreiben:

$$75) \quad \frac{d \log(x + yi)}{dt} = \frac{1}{2} \frac{\varphi'(u) + \frac{ik}{l}}{\varphi(u) + l} + \frac{1}{2} \frac{\varphi'(u) - \frac{ik}{l}}{\varphi(u) - l}$$

Die rechte Seite ist eine elliptische Funktion, dieselbe wird unendlich nur für:

$$\begin{aligned} 76) \quad \varphi(u) &= +l, & \varphi'(u) &= -\frac{ik}{l} \\ \varphi(u) &= -l, & \varphi'(u) &= +\frac{ik}{l} \\ \varphi(u) &= \infty \quad \text{i. h. für } u \equiv \omega_2 \end{aligned}$$

Da nun für $z = \pm l$ $\frac{dz}{dt} = \pm \frac{ik}{l}$ ist, wie aus Gleichung (68) hervorgeht, so kann man zwei Argumente $u = v_1$ u. $u = v_2$ finden, welche die Gleichungen (76) wirklich erfüllen u. zwar findet man dieselben nach den Formeln (71) durch folgende Gleichungen:

$$\begin{aligned} 77) \quad p v_1 &= l_2 + \frac{1}{4} \frac{R'(a_2)}{l - a_2}; & p' v_1 &= \frac{i}{4} \frac{R'(a_2)}{(l - a_2)^2} \frac{k}{l} \\ p v_2 &= l_2 - \frac{1}{4} \frac{R'(a_2)}{l + a_2}; & p' v_2 &= \frac{i}{4} \frac{R'(a_2)}{(l + a_2)^2} \frac{k}{l} \end{aligned}$$

Um die Beschaffenheit von v_1 u. v_2 etwas näher zu untersuchen, bemerken wir die folgenden Ungleichungen:

$$\begin{aligned} l_1 &> p v_1 > l_2 \\ l_3 &> p v_2 > -\infty \end{aligned}$$

Betrachtet man ferner die Tabelle:

u	pu	$p'u$
$0 \dots \omega$	$+\infty \dots l_1$	$-$
$\omega \dots \omega + \omega'$	$l_1 \dots l_2$	$+i$
$\omega + \omega' \dots \omega'$	$l_2 \dots l_3$	$+$
$\omega' \dots 0$	$l_3 \dots -\infty$	$-i$

so sieht man, dass v_1 in dem Intervalle $\omega \dots \omega + \omega'$, v_2 in dem Intervalle $\omega' \dots 0$ gelegen ist, falls man die

Constante k als positiv annimmt, oder es kann gesetzt werden:

$$78, \quad \begin{aligned} v_1 &= \omega + w_1 i \\ v_2 &= w_2 i \end{aligned}$$

worin w_1 u. w_2 reelle Größen sind, die beide zwischen 0 u. $\frac{\omega'}{2}$ liegen. — Nunmehr lautet die Gleichung (75)

$$\frac{d \log(x+yi)}{dt} = \frac{1}{2} \frac{\varphi'(u) + \varphi'(w_2 i)}{\varphi(u) - \varphi(w_2 i)} + \frac{1}{2} \frac{\varphi'(u) + \varphi'(\omega + w_1 i)}{\varphi(u) - \varphi(\omega + w_1 i)}$$

Wendet man hierauf die Formel (28) an, wobei zu beachten, dass in unserem Falle $\lambda = 0$ u. $u = \omega_2$ ist, so erhält man:

$$\begin{aligned} \frac{d \log(x+yi)}{dt} &= \frac{\zeta'(u - w_2 i)}{\zeta(u - w_2 i)} - \frac{\zeta'(u - \omega_2)}{\zeta(u - \omega_2)} + \frac{\zeta'(w_2 i - \omega_2)}{\zeta(w_2 i - \omega_2)} \\ &+ \frac{\zeta'(u - \omega - w_1 i)}{\zeta(u - \omega - w_1 i)} - \frac{\zeta'(u - \omega_2)}{\zeta(u - \omega_2)} + \frac{\zeta'(\omega + w_1 i - \omega_2)}{\zeta(\omega + w_1 i - \omega_2)} \end{aligned}$$

oder mit Rücksicht auf die Formel:

$$\frac{\zeta'(u - \omega_\lambda)}{\zeta(u - \omega_\lambda)} = \frac{\zeta'_\lambda u}{\zeta_\lambda u} - \eta_\lambda$$

$$79, \quad \frac{d \log(x+yi)}{dt} = \frac{\zeta'(u - w_2 i)}{\zeta(u - w_2 i)} + \frac{\zeta'_1(u - w_1 i)}{\zeta_1(u - w_1 i)} - 2 \frac{\zeta'_2 u}{\zeta_2 u} + \frac{\zeta'_2(w_2 i)}{\zeta_2(w_2 i)} + \frac{\zeta'_3(w_1 i)}{\zeta_3(w_1 i)}$$

In dieser Form (79) nun haben wir eine unmittelbarer integrierbare Gleichung erhalten. Bezeichnen wir daher mit $x_0 + y_0 i$ den Werth von $x + yi$ für $t = t_0$, also für $u = 0$, so wird:

$$80, \quad \frac{x + yi}{x_0 + y_0 i} = - \frac{\zeta_1(u - w_1 i) \zeta(u - w_2 i)}{\zeta_1(w_1 i) \zeta(w_2 i) \zeta_2^2 u} \ell \quad u \left(\frac{\zeta'_3(w_1 i)}{\zeta_3(w_1 i)} + \frac{\zeta'_2(w_2 i)}{\zeta_2(w_2 i)} \right)$$

Offenbar ist im Grunde gewonnen unsere Aufgabe gelöst, indem wir zu $x + yi$ als Funktionen von t

dargestellt haben.

Man hat daher, um die Aufgabe zu lösen, zunächst die drei Wurzeln der Gleichung $R(z) = 0$ aufzusuchen, sodann aus (72) die Größen e, e_1, e_2 zu berechnen, aus diesen dann die Funktionen $p \dots 5$ zu bilden u. endlich zwei Argumente v, v_2 oder $w_1 i + w_2 \dots w_2 i$ zu bestimmen, welche die Gleichungen (77) befriedigen.

Die Formel (80) formen wir noch dadurch um, dass wir \mathcal{J} -Funktionen einführen. Dann setzen wir:

$$v = \frac{t - t_0}{2\omega}, \quad \tau = \frac{\omega'}{\omega}$$

$$v_1 = \frac{w_1}{2\omega}, \quad v_2 = \frac{w_2}{2\omega}$$

Dann ist:

$$\sigma_\alpha u = C_\alpha e^{\eta \frac{u^2}{2\omega}} \mathcal{J}_\alpha(v), \quad \text{also:}$$

$$\frac{\sigma'_\alpha u}{\sigma_\alpha u} = \frac{\eta u}{\omega} + \frac{1}{2\omega} \frac{\mathcal{J}'_\alpha(v)}{\mathcal{J}_\alpha(v)}$$

Hieraus wird:

$$\frac{x + yi}{x_0 + y_0 i} = - \frac{1}{C_\alpha^2} \frac{\mathcal{J}_1(v - v_1 i) \mathcal{J}(v - v_2 i)}{\mathcal{J}_1(v_1 i) \cdot \mathcal{J}(v_2 i) \cdot \mathcal{J}_2^2(v)} e^{v \left(\frac{\mathcal{J}'_1(v_1 i)}{\mathcal{J}_1(v_1 i)} + \frac{\mathcal{J}'_2(v_2 i)}{\mathcal{J}_2(v_2 i)} \right)}$$

oder da $\frac{1}{C_\alpha} = \mathcal{J}_2(0)$ ist:

$$81) \quad \frac{x + yi}{x_0 + y_0 i} = - \frac{\mathcal{J}_2^2(0) \mathcal{J}_1(v - v_1 i) \mathcal{J}(v - v_2 i)}{\mathcal{J}_1(v_1 i) \cdot \mathcal{J}(v_2 i) \cdot \mathcal{J}_2^2(v)} e^{v \left(\frac{\mathcal{J}'_1(v_1 i)}{\mathcal{J}_1(v_1 i)} + \frac{\mathcal{J}'_2(v_2 i)}{\mathcal{J}_2(v_2 i)} \right)}$$

Der erste Theil dieses Ausdrucks ist reell periodisch, ändert man nämlich t um 2ω , also v um eine Einheit, so ändert sich \mathcal{J}_2 nicht, dagegen ändern \mathcal{J}_1 u. \mathcal{J} ihr Zeichen, so dass also ihr Product ebenfalls

ungeändert bleibt. Der Exponentialfaktor besitzt nun zwar diese Periode nicht, sondern eine andere, trotzdem aber ist vorstehende Formel sehr geeignet, den Verlauf der Bewegung kennen zu lernen. Man kann nämlich, da der Exponent eine rein imaginäre Größe ist, setzen:

$$82, \quad \frac{J'_1(v, i)}{J_1(v, i)} + \frac{J'_2(v, i)}{J_2(v, i)} = i m$$

Berechnet man dann ferner mit $\xi + \eta i$ die komplexe Größe, welche entsteht, wenn man den ersten Faktor rechts mit $x_0 + y_0 i$ multipliziert, so ist:

$$x + y i = (\xi + \eta i) e^{i m v}$$

also:

$$83, \quad \begin{aligned} x &= \xi \cos(mv) - \eta \sin(mv) \\ y &= \xi \sin(mv) + \eta \cos(mv) \end{aligned}$$

Danken wir uns nun ein neues dem bisherigen kongruentes Koordinatensystem $\xi \eta$, welches mit dem alten die vertikale Achse ($z \dots \xi$) u. den Anfangspunkt gemein hat u. nehmen wir an, dass dasselbe mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit m in der $x y$ Ebene rotiert, so werden die Coordinaten des Punktes $x y$ mit den Coordinaten $\xi \eta$ desselben Punktes gerade durch die Gleichungen (83) zusammenhängen. Hierin sind nun $\xi \eta$ allein abhängig von t u. zwar sind es periodische Functionen von t mit der Periode 2π . Dieselbe Periode besitzt aber auch $z = \xi$. Mithin ist die Bewegung des betrachteten Punktes eine perio-

Drücke mit Bezug auf ein rechtwinkliges Coordinatensystem, welches mit der constanten Winkelgeschwindigkeit m um die vertikale Achse des ursprünglichen Systems rotirt. Die absolute Bewegung des schwingenden Punktes im Raume ist jedoch keine periodische, wenigstens im Allgemeinen, da im Allgemeinen die Zeitpunkte, an denen $\xi = \cos(mv)$, $\sin(mv)$ wieder dieselben Werthe annehmen, nicht zusammenfallen. Nur in dem Ausnahmefalle, wo die beiden Perioden $2\omega = \frac{2\pi}{m}$ in einem rationalen Verhältnisse stehen, wird der schwingende Punkt nach Verlauf eines bestimmten Zeitabchnitts auch im Raume wieder dieselbe Lage einnehmen.

Schließlich wollen wir noch zur Berechnung von z eine bequemere Formel ableiten, also die Gl. (74) sind. Da nämlich $z + l$ eine elliptische Function von u ist, welche für $u = \pm w_1 i$ gleich 0 u. für $u = \pm \omega_2$ gleich ∞ wird, so ist:

$$z + l = C \frac{\wp(u - w_1 i) \wp(u + w_1 i)}{\wp(u - \omega_2) \wp(u + \omega_2)}$$

Die Constante ergibt sich einfach aus der Bemerkung, dass für $u = \omega + w_1 i$ $z = l$ wird, also:

$$2l = C \frac{\wp(\omega + (w_1 - w_2)i) \wp(\omega + (w_1 + w_2)i)}{\wp(w_1 i - \omega) \wp(w_1 i + \omega + \omega_2)}$$

folglich:

$$1 + \frac{z}{l} = 2 \frac{\zeta(w, i - \omega) \zeta(w, i + \omega + \omega_2) \zeta(u - w_2 i) \zeta(u + w_2 i)}{\zeta(\omega + i(w_1 - w_2)) \zeta(\omega + i(w_1 + w_2)) \zeta(u - \omega_2) \zeta(u + \omega_2)}$$

oder:

$$84) \quad 1 + \frac{z}{l} = 2 \cdot (l_1 - l_2) \frac{\zeta_2^2(w_1 i) \zeta_1(u - w_2 i) \zeta_1(u + w_2 i)}{\zeta_1(i(w_1 - w_2)) \zeta_1(i(w_1 + w_2)) \zeta_2^2 u}$$

In ganz analoger Weise läßt sich eine Formel für $1 - \frac{z}{l}$ ableiten, man findet:

$$85) \quad 1 - \frac{z}{l} = 2 \frac{\zeta_2^2(w_2 i) \zeta_1(u - w_1 i) \zeta_1(u + w_1 i)}{\zeta_1(i(w_1 - w_2)) \zeta_1(i(w_1 + w_2)) \zeta_2^2 u}$$

Wir bemerken hierbei, dass in den Ausdrücken für $x + yi$, $1 + \frac{z}{l}$, $1 - \frac{z}{l}$ sowie in den Wörtern (84) von z dieselbe Funktion ζu im Nenner vorkommt, es ruht dies daher, dass für reelle Werthe von t resp. u z stets endlich bleiben u. zwischen a_1 u. a_2 liegen muss.

Führen wir endlich noch in die Formeln (84) (85) \mathcal{J} -Functionen ein, so wird:

$$1 + \frac{z}{l} = 2 \frac{\mathcal{J}_2^2(v_1 i) \mathcal{J}_1(v - v_2 i) \mathcal{J}_1(v + v_2 i)}{\mathcal{J}_1(i(v_1 - v_2)) \mathcal{J}_1(i(v_1 + v_2)) \mathcal{J}_2^2 v}$$

86)

$$1 - \frac{z}{l} = 2 \frac{\mathcal{J}_2^2(v_2 i) \mathcal{J}_1(v - v_1 i) \mathcal{J}_1(v + v_1 i)}{\mathcal{J}_1(i(v_1 - v_2)) \mathcal{J}_1(i(v_1 + v_2)) \mathcal{J}_2^2 v}$$

In dieser Form geschrieben ist z wegen der starken Convergenz der \mathcal{J} -Reihen zur numerischen Berechnung am bequemsten; zugleich tritt das periodische Verhalten von z unmittelbar hervor, da bei einer Vermehrung von t um 2ω d.h. von v um

109
eine Einheit Zeitler u. immer dieselben blei-
ben.

Hiermit ist die Aufgabe des sphärischen
Pendels vollständig gelöst.

Bewegung eines Körpers um einen festen Punkt.

Bewegt sich ein Körper unter alleiniger Einwirkung der Schwerkraft, welche von constanter Größe u. Richtung angenommen werde, so bewegt sich sein Schwerpunkt in einer Parabel u. der Körper selbst um diesen so, als ob dasselbe fest wäre. Um daher die Bewegung des Körpers zu bestimmen, hätte man nur die Rotationsbewegung desselben um seinen als fest im Raume angenommenen Schwerpunkt zu untersuchen. - Nimmt man aber als festen Punkt, um den sich der Körper drehen soll, nicht gerade den Schwerpunkt, sondern einen andern Punkt, so läßt sich die Bewegung des Körpers im Allgemeinen nur bestimmen, wenn man abzieht von der Einwirkung irgend welcher Kräfte, u. nur in wenigen besonderen Fällen ist es möglich, die Bestimmung der Bewegung unter dem Einfluß der Schwerkraft durchzuführen.

Man denke sich außer einem festen Coordinatensystem $x y z$ noch ein zweites, dem ersten congruentes u. mit dem Körper fest verbundenes, mit ihm bewegliches Achsensystem $x' y' z'$, welches mit

ersterem denselben Anfangspunkt hat, u. zwar werde als solcher der feste Punkt gewählt. Die Coordinaten $x'y'z'$ eines Punktes sind constante, von der Zeit nicht abhängige Größen, die Coordinaten $x y z$ desselben Punktes aber Functionen der Zeit t . Zwischen beiden bestehen die Relationen:

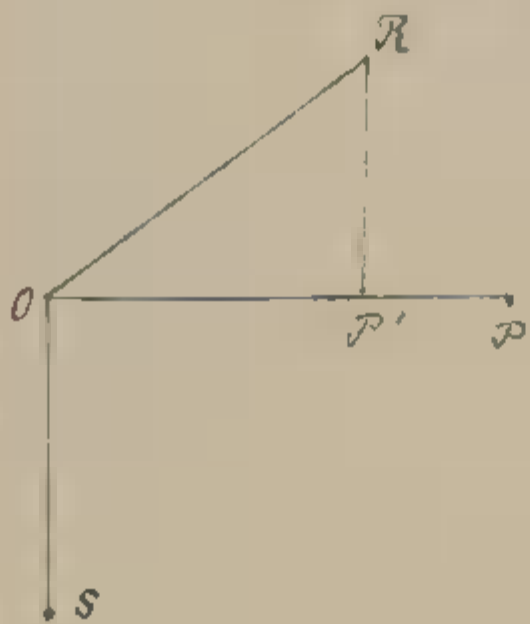
$$\begin{aligned} x &= \alpha x' + \alpha' y' + \alpha'' z' \\ 1) \quad y &= \beta x' + \beta' y' + \beta'' z' \\ z &= \gamma x' + \gamma' y' + \gamma'' z' \end{aligned}$$

Hierin bedeuten die 9 Größen $\alpha \beta \dots \gamma''$ die Cosinus des Winkels, welche die positiven Richtungen der beweglichen Achsen mit den der festen Achsen bilden. Besser noch werden sie angesehen als Coordinaten dreier in der Einheit der Entfernung und dem beweglichen Achsen gelegener Punkte $A B C$, bezogen auf das feste Achsensystem. Die Gleichungen (1) sagen daher aus, dass die Bewegung des Körpers vollständig bestimmt ist, wenn man die Bewegung dreier bestimmter Punkte kennt, also die Größen $\alpha \beta \dots \gamma''$ als Functionen der Zeit dargestellt hat. Da es sich dabei im Grunde auch nur um die Bestimmung von drei Größen handelt, folgt daraus, dass zwischen diesen 9 Größen 6 unabhängige Relationen bestehen. Anstatt aber erst diese 9 Größen durch drei von ihnen auszu-drücken u.

Dann diese als Funktionen der Zeit darzustellen, ist es leichter, dieselben direct als Funktionen von t darzustellen. Doch werden wir zunächst die zwischen den Coefficienten x, y, z, x', y', z' bestehenden Relationen auf eine eigenthümliche Weise ableiten.

Wir nennen Coordinaten einer Strecke die Projectionen derselben auf die Coordinatenachsen u. verketten mit Größennamen unter dem inneren Product zweier Strecken des Product aus der einen in die Projection der andern auf sie, unter dem äußeren Product zweier Strecken des Product aus der einen in das projicirende Loth. Sind daher $x, y, z, u. x', y', z'$ die Coordinaten zweier vom Aufangspunkte ausgehenden Strecken OP u. OR , so ist zunächst das innere Product derselben:

$$2, \quad OP \cdot OR = xx' + yy' + zz'$$



Größennamen stellt ferner das äußere Product $OP \cdot P'R$ durch eine Strecke dar, welche in O auf der Ebene OPR senkrecht steht u. deren Länge sich zur Längeneinheit ebenso verhält, wie das Rechteck $OP \cdot RP'$ zur Flächeneinheit. Dieser Begriff des äußeren Productes kommt, wenn auch unter andern Namen, schon bei Cauchy u. Poincaré vor.

Ersterer Punkt zieht P auf einem materiellen Punkt, auf welchem eine Kraft, deren Richtung u. Größe durch die Strecke PR gegeben ist, einwirkt u. nennt die Strecke OS , welche bei Graßmann das äußere Produkt repräsentiert, das lineare Moment der Kraft PR auf den Punkt O .

Poincaré, der den Begriff der Koppelkraft einführt, nennt dieselbe Strecke OS die geometrische Charakteristik der Koppelkraft. Dieselbe gibt durch ihre Richtung die Stellung der Ebene an, in welcher die Koppelkraft wirkt, — durch ihre Länge das Produkt aus der Kraft in den Koppelsarm.

Da die Projection von OS auf OP sowohl wie auf OR gleich 0 ist, so ist das innere Produkt der Strecken OS u. OP resp. OS u. OR , wenn $x''y''z''$ die Coordinaten von OS sind:

$$\begin{aligned} 3) \quad & x x'' + y y'' + z z'' = 0 \\ & x' x'' + y' y'' + z' z'' = 0 \end{aligned}$$

woraus folgt:

$$\begin{aligned} x'' &= K(yz' - zy') \\ y'' &= K(zx' - xz') \\ z'' &= K(xy' - yx') \end{aligned}$$

Die Constante K bestimmt sich so: Es ist:

$$R^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2 - \frac{(xx' + yy' + zz')^2}{x^2 + y^2 + z^2}$$

Es ist daher das äußere Produkt der beiden Strecken OP u. OR :

$$\begin{aligned} (OP \cdot RP')^2 &= (x^2 + y^2 + z^2)(x'^2 + y'^2 + z'^2) - (xx' + yy' + zz')^2 \\ &= \frac{x''^2 + y''^2 + z''^2}{K^2} \end{aligned}$$

Da nun $OP \cdot RP' = OS = (x''^2 + y''^2 + z''^2)^{\frac{1}{2}}$ ist, so folgt hieraus
 $K = \pm 1$.

Das doppelte Vorzeichen von K beruht sich offenbar darauf, dass man das Loth OS nach der einen oder der anderen Seite der Ebene ROP errichten kann. Wir setzen voraus, dass dies nach derjenigen Seite geschehen sei, für welche $K = +1$ ist. Dann ist:

$$\begin{aligned} x'' &= yz' - zy' \\ 4) \quad y'' &= zx' - xz' \\ z'' &= xy' - yx' \end{aligned}$$

$$5) \quad (OP \cdot RP')^2 = x''^2 + y''^2 + z''^2.$$

Denkt man sich nun die Strecken OP u. OR irgendwie bewegt nur so, dass das äussere Produkt derselben ungeschädelt bleibt, so wird sich auch der Punkt S kontinuierlich bewegen u. zwar so, dass die Länge der Strecke OS sich nicht ändert. Fällt dann OP in die Richtung der positiven x -Achse, OR in der xy -Ebene nach der Seite der x -Achse hin, nach welcher die positive y -Achse liegt, so wird die Strecke OS in die Richtung der positiven z -Achse fallen. In dieser Lage ist nämlich:

$$\begin{aligned} y &= 0 & z &= 0 & x &= + \\ z' &= 0 & x' &= + & y' &= + \end{aligned}$$

mithin nach den Formeln:

$$x'' = 0, \quad y'' = 0, \quad z'' = +$$

Es liegt mithin der Punkt S nach derjenigen Seite der x, y -Ebene hin, nach welcher sich die positive z -Achse erstreckt, oder es folgen die Strahlen OV , OR , OS in derselben Weise aufeinander wie die $x=$, $y=$, $z=$ Achse.

Die Ausdrücke (5) u. (2) für das äussere u. innere Produkt zweier Strahlen liefern uns sämtliche Relationen, welche zwischen den Coefficienten der Gleichungen (1) bestehen. Nehmen wir nämlich statt der beliebigen Punkte P u. R die auf den Achsen x' u. y' des beweglichen Coordinatensystems in der Einheit der Entfernung gelegenen Punkte A u. B , so wird der Punkt S , weil wir das bewegliche u. das feste Coordinatensystem als congruent angenommen haben, mit dem Punkte C zusammenfallen, welcher auf der z' -Achse ebenso gelegen ist, wie A u. B resp. auf der $x'=$, $y'=$ Achse. Das innere Produkt je zweier der Strahlen OA , OB , OC ist gleich 0, das äussere Produkt je zweier derselben ist gleich der Dritten d. h. gleich 1. Da nun die Coordinaten der Strahlen OA , OB , OC bezogen auf das feste Achsensystem resp. $\alpha\beta\gamma$, $\alpha'\beta'\gamma'$, $\alpha''\beta''\gamma''$ sind, so folgt aus (5) :

$$\begin{aligned} & \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1 \\ 6) \quad & \alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2 = 1 \\ & \alpha''^2 + \beta''^2 + \gamma''^2 = 1 ; \end{aligned}$$

ferner aus (2) :

$$\begin{aligned} \alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma' &= 0 \\ 7, \quad \alpha'\alpha'' + \beta'\beta'' + \gamma'\gamma'' &= 0 \\ \alpha''\alpha + \beta''\beta + \gamma''\gamma &= 0 \end{aligned}$$

n. hieraus nach (4) :

$$\begin{aligned} \alpha'' &= \beta\gamma' - \gamma\beta' ; & \alpha &= \beta'\gamma'' - \gamma'\beta'' ; & \alpha' &= \beta''\gamma - \gamma''\beta \\ 8, \quad \beta'' &= \gamma\alpha' - \alpha\gamma' ; & \beta &= \gamma'\alpha'' - \alpha'\gamma'' ; & \beta' &= \gamma''\alpha - \alpha''\gamma \\ \gamma'' &= \alpha\beta' - \beta\alpha' ; & \gamma &= \alpha'\beta'' - \beta'\alpha'' ; & \gamma' &= \alpha''\beta - \beta''\alpha \end{aligned}$$

Multipliziert man z. B. die erste Gruppe der Formeln (8) resp. mit $\alpha', \beta'', \gamma''$, so folgt mit Rücksicht auf (6), wenn man addiert, dass die Determinante der Gleichungen (1) :

$$9, \quad \begin{vmatrix} \alpha & \alpha' & \alpha'' \\ \beta & \beta' & \beta'' \\ \gamma & \gamma' & \gamma'' \end{vmatrix} = 1$$

ist, welche Gleichung übrigens nichts weiter aussagt, als dass die beiden orthogonalem Koordinatensysteme, das feste u. das bewegliche, einander congruent sind. Auf Grund dieser Gleichung (9) ergibt sich durch Auflösung der Gl. (1) nach $x'y'z'$:

$$\begin{aligned} x' &= \alpha x + \beta y + \gamma z \\ 10, \quad y' &= \alpha' x + \beta' y + \gamma' z \\ z' &= \alpha'' x + \beta'' y + \gamma'' z \end{aligned}$$

n. hieraus folgt, wenn man diese Gleichungen resp. mit $\alpha, \alpha', \alpha''$ multipliziert u. addiert u. dann dieselben mit (1) vergleicht :

$$\begin{aligned} \alpha^2 + \alpha'^2 + \alpha''^2 &= 1 & \text{ebenso} \\ 11, \quad \beta^2 + \beta'^2 + \beta''^2 &= 1 \\ \gamma^2 + \gamma'^2 + \gamma''^2 &= 1 \end{aligned}$$

und

$$\alpha\beta + \alpha'\beta' + \alpha''\beta'' = 0$$

$$12) \quad \beta\gamma + \beta'\gamma' + \beta''\gamma'' = 0$$

$$\gamma\alpha + \gamma'\alpha' + \gamma''\alpha'' = 0,$$

woraus weiter hervorgehen dieselben Gleichungen (8).
Damit sind sämtliche zwischen den Coefficienten der
Gleichungen (1) bestehenden Relationen hergeleitet. Von
denselben sind sechs, also etwa die Gleichungen (6) u. (7),
von einander unabhängig, die andern also die Gl. (8)
(9), (11) (12) eine einfache Folge der ersteren.

Nunmehr gehen wir über zur Transformation
der gewöhnlichen für die Rotation eines Körpers um
einen festen Punkt geltenden Differentialgleichungen.

Diese sind:

$$\frac{d}{dt} \sum m \left(y \frac{dz}{dt} - z \frac{dy}{dt} \right) = \sum m (yZ - zY)$$

$$13) \quad \frac{d}{dt} \sum m \left(z \frac{dx}{dt} - x \frac{dz}{dt} \right) = \sum m (zX - xZ)$$

$$\frac{d}{dt} \sum m \left(x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} \right) = \sum m (xY - yX)$$

wobei X, Y, Z die Componenten der äußeren Kräfte be-
deuten u. die Summation über sämtliche Punkte
des Körpers zu verstehen ist.

Nun folgt durch Differentiation der Gl. (1) nach ^{der} Zeit:

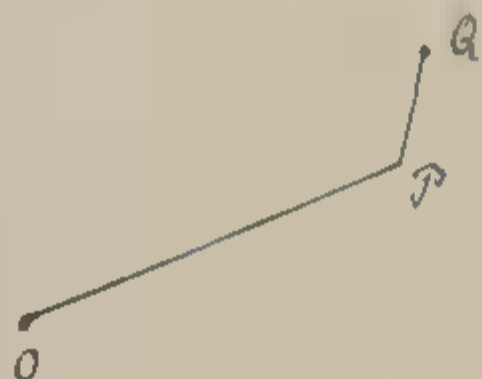
$$\frac{dx}{dt} = x' \frac{d\alpha}{dt} + y' \frac{d\alpha'}{dt} + z' \frac{d\alpha''}{dt}$$

$$14) \quad \frac{dy}{dt} = x' \frac{d\beta}{dt} + y' \frac{d\beta'}{dt} + z' \frac{d\beta''}{dt}$$

$$\frac{dz}{dt} = x' \frac{d\gamma}{dt} + y' \frac{d\gamma'}{dt} + z' \frac{d\gamma''}{dt}$$

Die Größen $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$ sind die Componenten
der Geschwindigkeit irgend eines Punktes zur Zeit t

parallel den festen Koordinatenachsen. Nennen wir die Komponenten dieser Geschwindigkeit parallel den beweglichen Achsen bezüglich $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$, so müssen, wenn



man sich $\bar{x} dt, \bar{y} dt, \bar{z} dt$ resp. $\frac{d\bar{x}}{dt} dt, \frac{d\bar{y}}{dt} dt, \frac{d\bar{z}}{dt} dt$ als Koordinaten der

in der Zeit dt durchlaufenen Strecke

PQ bezogen auf das bewegliche resp.

feste Koordinatensystem vorstellt, zwischen diesen dieselben Relationen bestehen, welche wir für die Koordinaten einer u. desselben Strecke gewonnen in dem einen oder anderen System abgeleitet haben d.h. es muß noch (10) sein:

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \alpha \frac{dx}{dt} + \beta \frac{dy}{dt} + \gamma \frac{dz}{dt} \\ 15, \quad \bar{y} &= \alpha' \frac{dx}{dt} + \beta' \frac{dy}{dt} + \gamma' \frac{dz}{dt} \\ \bar{z} &= \alpha'' \frac{dx}{dt} + \beta'' \frac{dy}{dt} + \gamma'' \frac{dz}{dt} \end{aligned}$$

Setzt man hierin die Werte (14) ein, berücksichtigt die aus (6) durch Differentiation nach t sich ergebenden Relationen:

$$\begin{aligned} \alpha \frac{d\alpha}{dt} + \beta \frac{d\beta}{dt} + \gamma \frac{d\gamma}{dt} &= 0 \\ 16, \quad \alpha' \frac{d\alpha'}{dt} + \beta' \frac{d\beta'}{dt} + \gamma' \frac{d\gamma'}{dt} &= 0 \\ \alpha'' \frac{d\alpha''}{dt} + \beta'' \frac{d\beta''}{dt} + \gamma'' \frac{d\gamma''}{dt} &= 0 \end{aligned}$$

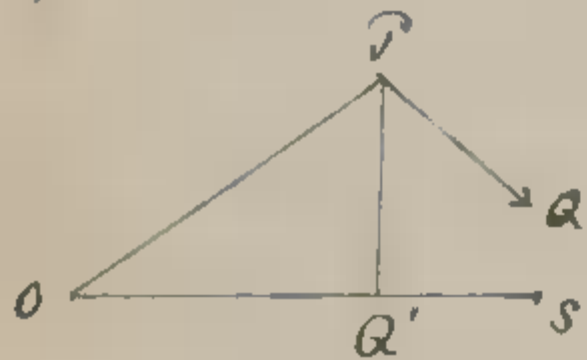
schreiben endlich mit Beachtung der Relationen (7):

$$\begin{aligned} p &= \alpha'' \frac{d\alpha'}{dt} + \beta'' \frac{d\beta'}{dt} + \gamma'' \frac{d\gamma'}{dt} = - \left(\alpha' \frac{d\alpha''}{dt} + \beta' \frac{d\beta''}{dt} + \gamma' \frac{d\gamma''}{dt} \right) \\ 17, \quad q &= \alpha \frac{d\alpha''}{dt} + \beta \frac{d\beta''}{dt} + \gamma \frac{d\gamma''}{dt} = - \left(\alpha'' \frac{d\alpha}{dt} + \beta'' \frac{d\beta}{dt} + \gamma'' \frac{d\gamma}{dt} \right) \\ r &= \alpha' \frac{d\alpha}{dt} + \beta' \frac{d\beta}{dt} + \gamma' \frac{d\gamma}{dt} = - \left(\alpha \frac{d\alpha'}{dt} + \beta \frac{d\beta'}{dt} + \gamma \frac{d\gamma'}{dt} \right) \end{aligned}$$

stellt man folgende Gleichungen:

$$18) \quad \begin{aligned} \bar{x} &= qz' - ry' \\ \bar{y} &= rx' - pz' \\ \bar{z} &= py' - qx' \end{aligned}$$

Diese Formeln haben eine leicht anzuwendende geometrische u. mechanische Bedeutung. Betrachten wir nämlich pqr als Coordinaten einer Strecke S bezogen auf das bewegliche Coordinatensystem, $x'y'z'$ ebenso als Coordinaten einer Strecke OP , so stellen $\bar{x}\bar{y}\bar{z}$ bezogen auf das bewegliche Coordinatensystem nach den Formeln (4) die Coordinaten einer Strecke dar, welche auf der Ebene OPS senkrecht steht u. deren Länge, gemessen durch die Längeneinheit,



gleich dem äußeren Product der Strecken OS u. OP d. h. gleich dem Product aus der Strecke OS in die Senkrechte

PQ' ist, die man von P auf OS fallen kann.

Andererseits sind $\bar{x}\bar{y}\bar{z}$ die Coordinaten von PQ d. h. die Coordinaten der Geschwindigkeit des Punktes P . Also:

$$PQ = OS \cdot PQ'.$$

Da nun OS in dem betrachteten Zeitmomente für alle Punkte des Körpers dieselbe ist, so sagt vorstehende Gleichung nichts anderes aus, als dass die Geschwindigkeit eines jeden Punktes des Körpers proportional seinem Abstände von der Geraden OS ist, u. da überdies diese Geschwindigkeit senkrecht zur Ebene POS gerichtet ist,

Dass die Bewegung des Körpers in dem betrachteten Zeitintervall aufgefasst werden kann als einfache Rotationsbewegung um die Achse OS . Man nennt daher auch OS die instantane Drehungsachse.

Es ist hierbei noch zu bemerken, dass die Drehung in dem Sinne erfolgt, d.h. dass PQ nach der Seite der Ebene POS zu liegt, dass OS , OT , PQ in demselben Sinne zu einander liegen, wie die positiven Richtungen der Koordinatenachsen.

Die augenblickliche Drehungsachse des Körpers kann auch definiert werden als Ort derjenigen Punkte, welche zur Zeit t die Geschwindigkeit 0 haben. Da zu diesen Punkten stets der feste Punkt O selbst gehört, so beschreibt die instantane Drehungsachse den Mantel eines Kegels. Die Strecke OS ist ferner gleich der augenblicklichen Geschwindigkeit derjenigen Punkte, welche von der augenblicklichen Drehungsachse die Entfernung 1 haben.

Löst man die Gleichungen (15) nach $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$ auf, so wird:

$$19, \quad \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \alpha \bar{x} + \alpha' \bar{y} + \alpha'' \bar{z} \\ \frac{dy}{dt} &= \beta \bar{x} + \beta' \bar{y} + \beta'' \bar{z} \\ \frac{dz}{dt} &= \gamma \bar{x} + \gamma' \bar{y} + \gamma'' \bar{z} \end{aligned}$$

... wenn man hierin die Werte (18) substituirt:

$$20, \quad \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= (\alpha' r - \alpha'' q) x' + (\alpha'' p - \alpha' r) y' + (\alpha q - \alpha' p) z' \\ \frac{dy}{dt} &= (\beta' r - \beta'' q) x' + (\beta'' p - \beta' r) y' + (\beta q - \beta' p) z' \\ \frac{dz}{dt} &= (\gamma' r - \gamma'' q) x' + (\gamma'' p - \gamma' r) y' + (\gamma q - \gamma' p) z' \end{aligned}$$

Diese Gleichungen gelten für jeden beliebigen Punkt des Körpers, mag derselbe nun zur Masse desselben gehören oder nur fest mit ihm verbunden sein; sie gelten daher auch für die drei Punkte A, B, C , welche in Bezug auf das feste Achsensystem resp. die Coordinaten α, β, γ , α', β', γ' , $\alpha'', \beta'', \gamma''$ u. in Bezug auf das bewegliche System resp. die Coordinaten: $100, 010, 001$ haben. Mithin wird:

$$\begin{aligned} \frac{d\alpha}{dt} &= \alpha' r - \alpha'' q, & \frac{d\alpha'}{dt} &= \alpha'' p - \alpha' r, & \frac{d\alpha''}{dt} &= \alpha' q - \alpha'' p \\ 21, \quad \frac{d\beta}{dt} &= \beta' r - \beta'' q, & \frac{d\beta'}{dt} &= \beta'' p - \beta' r, & \frac{d\beta''}{dt} &= \beta' q - \beta'' p \\ \frac{d\gamma}{dt} &= \gamma' r - \gamma'' q, & \frac{d\gamma'}{dt} &= \gamma'' p - \gamma' r, & \frac{d\gamma''}{dt} &= \gamma' q - \gamma'' p \end{aligned}$$

Die 9 Größen $\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma', \alpha'', \beta'', \gamma''$ werden also durch lineare Differentialgleichungen aus den Größen p, q, r bestimmt u. es kommt somit darauf an, zuerst diese Größen p, q, r zu finden. Darnach führen wir die Größen p, q, r in die Gleichungen⁽¹³⁾ ein. Sind x, y, z u. x', y', z' die Coordinaten zweier vom Anfangspunkte ausgehenden Strahlen bezogen auf das feste Achsensystem, so sind die Coordinaten derjenigen Strahlen, welche nach Länge u. Richtung das äussere Product der beiden darstellt:

$$yz, - zy, \quad zx, - xz, \quad xy, - yx,$$

Sind ebenso x', y', z' u. x'', y'', z'' die Coordinaten derselben beiden Strahlen bezogen auf das bewegliche Achsensystem, so sind die betreffenden Coordinaten der dritten Strahle:

$$y'z', - z'y', \quad z'x', - x'z', \quad x'y', - y'x'.$$

u. zwischen ersteren u. letzteren bestehen die Relativ-

nun für die Koordinatentransformation. Nehmen wir daher an, dass die eine Achse nach dem beliebigen Punkte P gehe, die zweite die Geschwindigkeit dieses Punktes zur Zeit t nach Größe u. Richtung darstelle, so haben wir:

$$\begin{aligned} y'\bar{z} - z'\bar{y} &= \alpha \left(y \frac{dz}{dt} - z \frac{dy}{dt} \right) + \beta \left(z \frac{dx}{dt} - x \frac{dz}{dt} \right) + \gamma \left(x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} \right) \\ 22, \quad z'\bar{x} - x'\bar{z} &= \alpha' \left(y \frac{dz}{dt} - z \frac{dy}{dt} \right) + \beta' \left(z \frac{dx}{dt} - x \frac{dz}{dt} \right) + \gamma' \left(x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} \right) \\ x'\bar{y} - y'\bar{x} &= \alpha'' \left(y \frac{dz}{dt} - z \frac{dy}{dt} \right) + \beta'' \left(z \frac{dx}{dt} - x \frac{dz}{dt} \right) + \gamma'' \left(x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} \right) \end{aligned}$$

Multipliziert man mit m u. summiert dann über alle Punkte des Körpers, so erhält man, wenn man noch zur Abkürzung setzt:

$$\begin{aligned} \sum m \left(y \frac{dz}{dt} - z \frac{dy}{dt} \right) &= L \\ 23, \quad \sum m \left(z \frac{dx}{dt} - x \frac{dz}{dt} \right) &= M \\ \sum m \left(x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} \right) &= N \end{aligned}$$

folgende Gleichungen:

$$\begin{aligned} \alpha L + \beta M + \gamma N &= \sum m (y'\bar{z} - z'\bar{y}) \\ 24, \quad \alpha' L + \beta' M + \gamma' N &= \sum m (z'\bar{x} - x'\bar{z}) \\ \alpha'' L + \beta'' M + \gamma'' N &= \sum m (x'\bar{y} - y'\bar{x}) \end{aligned}$$

Substituiert man auf der rechten Seite die Werthe (18) u. setzt dann:

$$\begin{aligned} \sum m (y'^2 + z'^2) &= A \\ 25, \quad \sum m (z'^2 + x'^2) &= B \\ \sum m (x'^2 + y'^2) &= C \end{aligned} \quad \begin{aligned} \sum m y'z' &= A' \\ \sum m z'x' &= B' \\ \sum m x'y' &= C' \end{aligned}$$

so erhält man, da p, q, r für alle Punkte dieselben sind:

$$\begin{aligned} \alpha L + \beta M + \gamma N &= A p - C' q - B' r \\ 26, \quad \alpha' L + \beta' M + \gamma' N &= B q - A' r - C' p \\ \alpha'' L + \beta'' M + \gamma'' N &= C r - B' p - A' q \end{aligned}$$

Man bemerkt zugleich, dass diese Ausdrücke auf der rechten Seite Ableitungen einer u. derselben Funktion nach p, q, r sind, nämlich der Funktion:

$$27, \quad T = \frac{1}{2} (Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 - 2A'qr - 2B'rp - 2C'pq).$$

also:

$$28, \quad Ap - C'q - B'r = \frac{\partial T}{\partial p}; \quad Bq - A'r - C'p = \frac{\partial T}{\partial q}; \quad Cr - B'p - A'q = \frac{\partial T}{\partial r}.$$

Auf Grund dieser Beziehungen gehen aus den Gleichungen (26) folgende hervor:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial p} &= \alpha \frac{dL}{dt} + \beta \frac{dM}{dt} + \gamma \frac{dN}{dt} + L \frac{d\alpha}{dt} + M \frac{d\beta}{dt} + N \frac{d\gamma}{dt} \\ 29, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial q} &= \alpha' \frac{dL}{dt} + \beta' \frac{dM}{dt} + \gamma' \frac{dN}{dt} + L \frac{d\alpha'}{dt} + M \frac{d\beta'}{dt} + N \frac{d\gamma'}{dt} \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial r} &= \alpha'' \frac{dL}{dt} + \beta'' \frac{dM}{dt} + \gamma'' \frac{dN}{dt} + L \frac{d\alpha''}{dt} + M \frac{d\beta''}{dt} + N \frac{d\gamma''}{dt} \end{aligned}$$

Diese Ausdrücke lassen sich noch sehr wesentlich vereinfachen. Es ist nämlich nach (21):

$$\begin{aligned} L \frac{d\alpha}{dt} + M \frac{d\beta}{dt} + N \frac{d\gamma}{dt} &= L(\alpha'r - \alpha''q) + M(\beta'r - \beta''q) + N(\gamma'r - \gamma''q) \\ &= (L\alpha' + M\beta' + N\gamma')r - (L\alpha'' + M\beta'' + N\gamma'')q \\ &= r \frac{\partial T}{\partial q} - q \frac{\partial T}{\partial r}. \end{aligned}$$

mithin:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial p} &= \alpha \frac{dL}{dt} + \beta \frac{dM}{dt} + \gamma \frac{dN}{dt} + r \frac{\partial T}{\partial q} - q \frac{\partial T}{\partial r} \\ 30, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial q} &= \alpha' \frac{dL}{dt} + \beta' \frac{dM}{dt} + \gamma' \frac{dN}{dt} + p \frac{\partial T}{\partial r} - r \frac{\partial T}{\partial p} \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial r} &= \alpha'' \frac{dL}{dt} + \beta'' \frac{dM}{dt} + \gamma'' \frac{dN}{dt} + q \frac{\partial T}{\partial p} - p \frac{\partial T}{\partial q}. \end{aligned}$$

Die Transformation der Gl. (13) wird vollständig durchgeführt sein, sobald wir noch L, M, N auf das bewegliche Koordinatensystem transformiert haben. Es ist nach (13) u. (23):

$$\begin{aligned} \frac{dL}{dt} &= \sum m (\dot{y}\dot{z} - z\dot{y}) \\ 23^a, \quad \frac{dM}{dt} &= \sum m (z\dot{x} - x\dot{z}) \\ \frac{dN}{dt} &= \sum m (x\dot{y} - y\dot{x}) \end{aligned}$$

Nennen wir die Komponenten der gesamten auf den Punkt m wirkenden Kraft parallel den Achsen des beweglichen Systems resp. $X'Y'Z'$, so gelten zwischen $X'Y'Z'$ u. $X'Y'Z'$ dieselben Relationen, wie zwischen xyz u. $x'y'z'$, mithin ist:

$$X' = \alpha X + \beta Y + \gamma Z$$

$$Y' = \alpha' X + \beta' Y + \gamma' Z$$

$$Z' = \alpha'' X + \beta'' Y + \gamma'' Z$$

Hieraus folgt:

$$(y'Z' - z'Y') = \alpha (yZ - zY) + \beta (zX - xZ) + \gamma (xY - yX)$$

$$z'X' - x'Z' = \alpha' (yZ - zY) + \beta' (zX - xZ) + \gamma' (xY - yX)$$

$$x'Y' - y'X' = \alpha'' (yZ - zY) + \beta'' (zX - xZ) + \gamma'' (xY - yX)$$

Multipliziert man jede dieser Gleichungen mit m u. summiert dann über alle Punkte des Körpers, so wird nach (23^a):

$$\sum m (y'Z' - z'Y') = \alpha \frac{dL}{dt} + \beta \frac{dM}{dt} + \gamma \frac{dN}{dt}$$

$$31) \quad \sum m (z'X' - x'Z') = \alpha' \frac{dL}{dt} + \beta' \frac{dM}{dt} + \gamma' \frac{dN}{dt}$$

$$\sum m (x'Y' - y'X') = \alpha'' \frac{dL}{dt} + \beta'' \frac{dM}{dt} + \gamma'' \frac{dN}{dt}$$

Mithin gehen die Differentialgleichungen (13) wegen (30) über in die folgenden:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial p} - r \frac{\partial T}{\partial q} + q \frac{\partial T}{\partial r} = \sum m (y'Z' - z'Y')$$

$$32) \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial q} - p \frac{\partial T}{\partial r} + r \frac{\partial T}{\partial p} = \sum m (z'X' - x'Z')$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial r} - q \frac{\partial T}{\partial p} + p \frac{\partial T}{\partial q} = \sum m (x'Y' - y'X').$$

Überall ist jedoch stillschweigend eine Voraussetzung gemacht, nämlich die, dass die auf das System einwirkenden Kräfte außer etwa der Zeit t nur noch die bese-

Dimensionen der Punkte enthalten, nicht aber abhängig sind von den Geschwindigkeiten oder gar von den Beschleunigungen. Sind nämlich X, Y, Z als Funktionen von x, y, z, t gegeben, so werden X', Y', Z' , welche aus ersteren durch Substitution der Werthe (1) hervorgehen, Funktionen der 9 Größen $\alpha, \beta, \dots, \gamma''$ u. außerdem der Zeit t sein. Wir haben dann in den Gleichungen (21) u. (32) ein vollständiges System von 12 Differentialgleichungen zur Bestimmung der 12 Größen $\alpha, \beta, \gamma, \dots, \gamma'' p, q, r$. Die Gleichungen (32) lassen sich noch bedeutend vereinfachen, wenn wir über das mit dem Körper fest verbundene Achsensystem eine bestimmte Annahme machen. Werden nämlich die Coordinaten p, q, r des Punktes S , bezogen auf ein neues mit dem Körper fest verbundenes Achsensystem, mit p, q, r bezeichnet, so bestehen zwischen beiden Gleichungen von der Form:

$$p = \lambda p_1 + \mu q_1 + \nu r_1$$

$$q = \lambda' p_1 + \mu' q_1 + \nu' r_1$$

$$r = \lambda'' p_1 + \mu'' q_1 + \nu'' r_1$$

Freilich kann man diese Werthe in den Ausdruck von T ein, welcher eine homogene Funktion zweiten Grades von p, q, r ist, so geht dieselbe in eine analoge Form über:

$$T = \frac{1}{2} (A_1 p_1^2 + B_1 q_1^2 + C_1 r_1^2 - 2A'_1 q_1 r_1 - 2B'_1 r_1 p_1 - 2C'_1 p_1 q_1).$$

Man kann dabei aber stets $\lambda, \mu, \nu, \dots, \nu''$ so wählen, dass die Glieder mit den Produkten zweier Coordinaten ver-

schwinden, dass also $A' = B' = C' = 0$ ist u. T die Gestalt erhält:

$$T = \frac{1}{2} (A p^2 + B q^2 + C r^2)$$

Wir wollen daher von vornherein annehmen, dass das bewegliche Achsensystem $x'y'z'$ bereits so gewählt sei, dass $A' = B' = C' = 0$ werden u. also T die Form hat:

$$T = \frac{1}{2} (A p^2 + B q^2 + C r^2)$$

Dann wird:

$$\frac{\partial T}{\partial p} = A p, \quad \frac{\partial T}{\partial q} = B q, \quad \frac{\partial T}{\partial r} = C r$$

es gehen dadurch die Differentialgleichungen (32) in die folgenden einfacheren über:

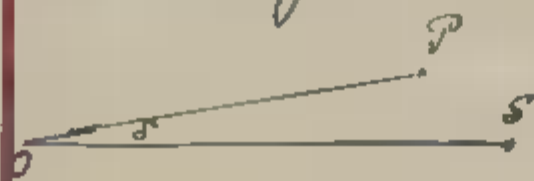
$$\begin{aligned} A \frac{dp}{dt} + (C - B) q r &= \sum m (y' \ddot{z}' - z' \ddot{y}') \\ 33) \quad B \frac{dq}{dt} + (A - C) r p &= \sum m (z' \ddot{x}' - x' \ddot{z}') \\ C \frac{dr}{dt} + (B - A) p q &= \sum m (x' \ddot{y}' - y' \ddot{x}') \end{aligned}$$

An dieser Stelle dürfte es zweckmässig sein, die mechanische u. geometrische Bedeutung der Größen A, B, C, A', B', C' u. der Größe T etwas näher zu untersuchen. Es ist nämlich T die lebendige Kraft des Systems zur Zeit t .

Dann es ist:

$$\begin{aligned} 34) \quad \frac{1}{2} \sum m \left\{ \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dz}{dt} \right)^2 \right\} &= \frac{1}{2} \sum m (\bar{x}^2 + \bar{y}^2 + \bar{z}^2) \\ &= \frac{1}{2} \{ A p^2 + B q^2 + C r^2 - 2 A' q r - 2 B' r p - 2 C' p q \} = T \end{aligned}$$

Man kann denselben aber noch einen andern Ausdruck geben. Es ist nämlich:



$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \sum m (\bar{x}^2 + \bar{y}^2 + \bar{z}^2) \\ &= \frac{1}{2} \sum m ((x'^2 + y'^2 + z'^2)(p^2 + q^2 + r^2) - (x'p + y'q + z'r)^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \sum m (OP^2 \cdot OS^2 - OP^2 \cdot OS^2 \cos^2 \delta) \\
&= \frac{1}{2} \sum m OS^2 \cdot OP^2 \sin^2 \delta \\
&= \frac{1}{2} OS^2 \cdot \sum m P^2
\end{aligned}$$

Berechnet man also OS , welches gleich der augenblicklichen Rotationsgeschwindigkeit des Körpers um die Achse OS ist, mit ω , ferner den Abstand des Punktes P von dieser Achse mit r , so ist:

$$35) \quad T = \frac{1}{2} \omega^2 \sum m r^2$$

Nun ist aber $\sum m r^2$ das Trägheitsmoment des Körpers in Bezug auf die augenblickliche Rotationsachse; mithin ist die lebendige Kraft des Systems gleich dem Produkt aus dem halben Quadrat der Winkelgeschwindigkeit in das Trägheitsmoment in Bezug auf die instantane Drehungsachse. In dieser Form ist der Ausdruck für die lebendige Kraft unabhängig von der Wahl des Coordinatensystems.

Hieraus ist es leicht, die Bedeutung von $A B C \dots C'$ anzugeben. Sind nämlich $u v w$ die Coordinaten irgend einer Kräfte OA bezogen auf das bewegliche Achsensystem u , betrachtet man die Gleichung:

$$36^a) \quad \sum m \{ (x'^2 + y'^2 + z'^2)(u^2 + v^2 + w^2) - (x'u + y'v + z'w)^2 \} = 1$$

oder:

$$36) \quad A u^2 + B v^2 + C w^2 - 2 A' v w - 2 B' w u - 2 C' u v = 1$$

so stellt dieselbe eine Fläche zweiten Grades dar. Der Ausdruck auf der linken Seite besitzt aber in Bezug auf die Achse OA dieselbe Bedeutung, wie der Ausdruck für $2T$ in Be-

zung auf die Achse OQ dieselbe Bedeutung, wie der Ausdruck für z in Bezug auf OS , d. h. es ist jener Ausdruck gleich $\xi^2 \sum m \zeta^2$, wenn ξ die Winkelgeschwindigkeit um die Achse OQ u. ζ den Abstand eines Punktes des Körpers von derselben bezeichnet also:

$$37) \quad \xi^2 \sum m \zeta^2 = Au^2 + Bv^2 + Cw^2 - 2A'uv - 2B'vw - 2C'u'v = 1.$$

Diese Fläche stellt ein Ellipsoid dar, welches den Namen „Freigheitsellipsoid“ führt. Hieraus folgt:

$$\sum m \zeta^2 = A \left(\frac{u}{\xi} \right)^2 + B \left(\frac{v}{\xi} \right)^2 + C \left(\frac{w}{\xi} \right)^2 - 2A' \frac{u}{\xi} \frac{v}{\xi} - 2B' \frac{v}{\xi} \frac{w}{\xi} - 2C' \frac{u}{\xi} \frac{w}{\xi} = \frac{1}{\xi^2}$$

Nun ist aber $\xi^2 = u^2 + v^2 + w^2$, wie aus (36^a) unmittelbar folgt d. h. es ist ξ ein Radiusvektor des Centralellipsoids, folglich sagt die letzte Formel aus, dass das Freigheitsmoment des Körpers bezüglich einer beliebigen Richtung umgekehrt proportional dem Quadrat des dieser Richtung parallelen Radiusvektors des Centralellipsoids ist. Denkt man sich jetzt das mit dem Körper fest verbundene Achsensystem so gewählt, dass dasselbe mit den Achsen des Freigheitsellipsoids zusammenfällt, so ist:

$$A' = B' = C' = 0$$

und daher:

$$\sum m \zeta^2 = A \left(\frac{u}{\xi} \right)^2 + B \left(\frac{v}{\xi} \right)^2 + C \left(\frac{w}{\xi} \right)^2 = \frac{1}{\xi^2}$$

Leist man jetzt den Punkt $u v w$ bezüglich in die Achsen des Freigheitsellipsoids rücken, so wird resp.

$$\sum m \zeta_1^2 = A, \quad \sum m \zeta_2^2 = B, \quad \sum m \zeta_3^2 = C.$$

d. h. die 3 Größen $A B C$ bedeuten einmal die reciproken

Quadraten aus den Hauptachsen des Trägheitsellipsoids, andererseits die Trägheitsmomente des Körpers bezüglich dieser Hauptachsen. Man nennt daher die Achsen des Trägheitsellipsoids die Hauptträgheitsachsen. Die Größen A, B, C die Hauptträgheitsmomente des Körpers. Sind dieselben alle drei von einander verschieden, so gibt es nur ein einziges orthogonales Achsenystem von der Beschaffenheit, dass $A' = B' = C' = 0$ ist. Die eine der Größen A, B, C ist dann ein absolutes Minimum, eine zweite ein absolutes Maximum. Sind zwei der Größen A, B, C einander gleich, so ist das Trägheitsellipsoid ein Rotationsellipsoid; in diesem Falle ist nur eine Hauptachse bestimmt, die anderen beiden willkürlich. Ist endlich $A = B = C$, so ist das Trägheitsellipsoid eine Kugel u. das bewegliche Koordinatensystem kann willkürlich gewählt werden.

Wir gehen jetzt zu den Differentialgleichungen (33) zurück. Die allgemeine Lösung derselben bei beliebig gegebenen Kräften ist bis jetzt noch nicht gelungen; vielmehr hat man sie nur dann lösen können, wenn die auf der rechten Seite stehenden Ausdrücke gleich 0 sind, u. dies ist der Fall, wenn entweder auf das System keine Kräfte wirken, wobei der feste Punkt ein beliebiger sein kann, oder wenn auf das System eine konstante Kraft also etwa die Schwerkraft wirkt u. der Angriffspunkt derselben als fester Punkt betrachtet wird. In beiden Fällen gelten also die Gleichungen:

$$\begin{aligned} \frac{dp}{dt} &= \frac{B-C}{A} q r \\ 38) \quad \frac{dq}{dt} &= \frac{C-A}{B} r p \\ \frac{dr}{dt} &= \frac{A-B}{C} p q \end{aligned}$$

Aus diesen sind p, q, r als Functionen der Zeit t zu bestimmen. Hört man dies gethan, so findet man $\alpha, \beta, \dots, \gamma$ aus den Gleichungen (21). Statt jedoch die Integrationen von (38) auszuführen, wollen wir möglichst einfache Gleichungen zur Bestimmung von $\gamma, \gamma', \gamma''$ herleiten, da sich zeigt, dass man durch geeignete Wahl des festen Coordinatensystems bewirken kann, dass $\gamma, \gamma', \gamma''$ einfach den Größen p, q, r proportional werden. Aus den Gleichungen (26) folgt nämlich, da bei unserer Wahl des mit dem Körper fest verbundenen Coordinatensystems $A' = B' = C' = 0$ ist:

$$\begin{aligned} \alpha L + \beta M + \gamma N &= A p \\ 39) \quad \alpha' L + \beta' M + \gamma' N &= B q \\ \alpha'' L + \beta'' M + \gamma'' N &= C r \end{aligned}$$

Diese Gleichungen sind nun einer wesentlichen Vereinfachung fähig. Bei unserer Annahme über die auf das System wirkenden Kräfte folgt nämlich aus (31) unmittelbar, dass die Größen L, M, N Constanten sind; man kann aber ferner noch stets bewirken, dass $L = M = 0$ u. N einen positiven Werth annimmt. Es bezeichnen nämlich die Größen L, M, N die Componenten des Gesamtbewegungsmoments des Körpers in Bezug auf den Coordinatenanfangspunkt; da nun L, M, N Constante d. h. von der Zeit unabhängige Größen sind, so kann man L, M, N ansehen als Coordinaten einer Strecke, welche in Bezug auf

Das feste Achsensystem eine unveränderliche Lage u. daher überhaupt eine im Raume absolut feste Richtung u. Größe hat. Führt man nun statt des ersten festen Coordinatensystems ein neues ein, welches denselben Aufangspunkt hat u. dessen positive z-Achse mit jener im Raume festen Richtung zusammenfällt, so werden von den Größen $L' M' N'$, welches die Componenten jenes Gesamtkreisungsmomentes bezüglich des neuen Achsensystems sein sollen u. die somit die transformierten Ausdrücke bezüglich von $L M N$ sind, zwei, nämlich L' u. M' verschwinden, u. die Dritte N' wird einen positiven Werth besitzen, der mit h bezeichnet werden möge. Nehmen wir daher an, dass das feste Achsensystem von vornherein so gewählt worden sei, dass $L = M = 0$ u. $N = h$ ist, was ergeben sich aus den Gleichungen (39) die einfachen Beziehungen:

$$40, \quad y = \frac{A}{h} p, \quad y' = \frac{B}{h} q, \quad y'' = \frac{C}{h} r$$

vermöge deren die Gleichungen (38) in folgende übergehen:

$$41, \quad \begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= \frac{B-C}{BC} h \cdot y' y'' \\ \frac{dy'}{dt} &= \frac{C-A}{CA} h \cdot y'' y \\ \frac{dy''}{dt} &= \frac{A-B}{AB} h \cdot y y' \end{aligned}$$

Gleichungen, welche dieselbe Form besitzen wie die Gl. (38) zur Bestimmung von p, q, r . Um dieses System von Differentialgleichungen von häufig vorkommender Gestalt gleich allgemein zu lösen, setzen wir:

$$\begin{aligned}
 \frac{dx_1}{dt} &= -\alpha_1 x_2 x_3 \\
 42, \quad \frac{dx_2}{dt} &= -\alpha_2 x_3 x_1 \\
 \frac{dx_3}{dt} &= -\alpha_3 x_1 x_2
 \end{aligned}$$

Hierin bedeuten $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ willkürliche von 0 verschiedene Constanten; wäre z.B. $\alpha_1 = 0$, so erhielte man $x_1 = \text{const}$ u. sodann durch Elimination von x_1 aus der zweiten u. dritten Gleichung sehr einfache lineare Differentialgleichungen zur Bestimmung von x_2, x_3 . Setzt man:

$$43, \quad s = \frac{1}{3} (\alpha_2 \alpha_3 x_1^2 + \alpha_3 \alpha_1 x_2^2 + \alpha_1 \alpha_2 x_3^2)$$

so wird:

$$\frac{ds}{dt} (s - \alpha_2 \alpha_3 x_1^2) = 0$$

u. somit:

$$s - \alpha_2 \alpha_3 x_1^2 = e' \quad \text{Analog}$$

$$44, \quad s - \alpha_3 \alpha_1 x_2^2 = e''$$

$$s - \alpha_1 \alpha_2 x_3^2 = e'''$$

wobei e', e'', e''' constante Größen sind, welche bestimmt sein werden, sobald für irgend einen Zeitpunkt die Werte von x_1, x_2, x_3 gegeben sind. Nun ist aus (43) = (42)

$$\frac{ds}{dt} = -2 \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 x_1 x_2 x_3$$

mithin:

$$45, \quad \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 = 4 (s - e') (s - e'') (s - e''')$$

Hierbei ist ferner zu bemerken, dass aus (44) folgt:

$$46, \quad e' + e'' + e''' = 0$$

Somit geht aus (45) die Gleichung hervor:

$$47, \quad s = p(t - t')$$

wo p die zu den drei Größen e gehörige elliptische Function

„ t' eine willkürliche Constante bedeutet, welche bestimmt ist bis auf eine Periode, wenn die Werthe von x, x_2, x_3 zu irgend einer Zeit t_0 bekannt sind, dann dann ist:

$$p(t_0 - t') = s_0$$

$$p'(t_0 - t') = -2\alpha_1\alpha_2\alpha_3 x_1^0 x_2^0 x_3^0$$

Damit ist aber $t_0 - t'$ u. somit t' vollständig bestimmt. Man findet nun hiernach leicht x, x_2, x_3 selbst, dann es ist:

$$48) \quad \alpha_2 \alpha_3 x_1^2 = s - e' = \frac{\sigma_\lambda(t-t')}{\sigma^2(t-t')}$$

Dabei ist zu bemerken, dass es im Falle, dass die drei Größen $\alpha, \alpha_2, \alpha_3$ complex sind, vollständig gleichgültig ist, wie man die Reihenfolge der Größen e festsetzt, sind aber wie im vorliegenden Falle die Größen α reell, so werden auch e, e', e'' reell sein u. es wird unter ihnen eine größte, eine kleinste u. eine mittlere geben; durch die Reihenfolge derselben sind dann die Indizes λ, μ, ν bestimmt. Aus (48) ergibt sich:

$$x_1 = \frac{\varepsilon_1}{\sqrt{\alpha_2} \sqrt{\alpha_3}} \frac{\sigma_\lambda(t-t')}{\sigma(t-t')}$$

$$49) \quad x_2 = \frac{\varepsilon_2}{\sqrt{\alpha_3} \sqrt{\alpha_1}} \frac{\sigma_\mu(t-t')}{\sigma(t-t')}$$

$$x_3 = \frac{\varepsilon_3}{\sqrt{\alpha_1} \sqrt{\alpha_2}} \frac{\sigma_\nu(t-t')}{\sigma(t-t')}$$

Hierin bedeuten die $\varepsilon \pm 1$; jedoch sind sie nicht unabhängig von einander, man kann sie indessen sämtlich gleich $+1$ setzen, wenn man die Werthe von $\sqrt{\alpha_1}, \sqrt{\alpha_2}, \sqrt{\alpha_3}$ willkürlich läßt. Es ist nämlich:

$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{\varepsilon_1}{\sqrt{\alpha_2} \sqrt{\alpha_3}} \frac{d}{dt} \left(\frac{\sigma_\lambda}{\sigma} \right) = - \frac{\varepsilon_1}{\sqrt{\alpha_2} \sqrt{\alpha_3}} \frac{\sigma_\mu \sigma_\nu}{\sigma^2}$$

wie aus Ellipt. Funct. par. hervorgeht; mithin:

$$\frac{dx_1}{dt} = - \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2 \varepsilon_3} a_1 x_2 x_3$$

u. daher, wenn man dies mit (42) vergleicht:

$$\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2 \varepsilon_3} = 1, \quad \text{also da } \varepsilon_1^2 = +1 \text{ ist:}$$

$$\varepsilon_2 \varepsilon_3 = 1.$$

Mithin sind entweder sämtliche ε positiv, oder aber es sind zwei negativ, das dritte positiv. Fixirt man nun eine der mit $\frac{\varepsilon_3}{\varepsilon}$ (oder $\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon}$) multiplizierten Wurzeln willkürlich, so kann man die andere so wählen, dass das im Zähler stehende ε positiv ist. Hiernach kann man ferner in dem Ausdruck mit $\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon}$ (oder $\frac{\varepsilon_3}{\varepsilon}$) die dritte Wurzel so fixiren, dass das im Zähler vorkommende ε ebenfalls positiv ist. Dann ist wegen vorstehender Relation das dritte ε vollständig bestimmt. Da man nun aber durch Veränderung der willkürlichen Constanten t' um 2ω resp. 2ω stets bewirken kann, dass $\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon}$ resp. $\frac{\varepsilon_3}{\varepsilon}$ das entgegengesetzte Zeichen annimmt, so folgt hieraus unmittelbar, dass sämtliche ε gleich $+1$ u. die Wurzeln aus den Größen a vollständig willkürlich gewählt werden können. Daher ist die allgemeine Auflösung der Gleichungen (42):

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{\sqrt{a_2} \sqrt{a_3}} \frac{\varepsilon_2 (t-t')}{\varepsilon (t-t')} \\ 50) \quad x_2 &= \frac{1}{\sqrt{a_3} \sqrt{a_1}} \frac{\varepsilon_3 (t-t')}{\varepsilon (t-t')} \\ x_3 &= \frac{1}{\sqrt{a_1} \sqrt{a_2}} \frac{\varepsilon_1 (t-t')}{\varepsilon (t-t')} \end{aligned}$$

wobei die Wurzelgrößen beliebig fixirt werden können.

In unserer Aufgabe ist nun:

$$51, \quad \alpha_1 = \left(\frac{1}{B} - \frac{1}{C}\right)h, \quad \alpha_2 = \left(\frac{1}{C} - \frac{1}{A}\right)h, \quad \alpha_3 = \left(\frac{1}{A} - \frac{1}{B}\right)h$$

Mitteln wird, wenn wir statt der G -Quotienten die Funktionen p einführen:

$$y^2 = \frac{A^2 B C}{(A-C)(B-A)h^2} (p(t-t') - e_\lambda)$$

$$52, \quad y'^2 = \frac{A B^2 C}{(B-A)(C-B)h^2} (p(t-t') - e_\mu)$$

$$y''^2 = \frac{A B C^2}{(C-B)(A-C)h^2} (p(t-t') - e_\nu)$$

Es handelt sich jetzt darum zu entscheiden, welche der Größen λ, μ, ν resp. den Werth 1 2 3 annimmt. Die Constanten e_λ, e_μ, e_ν wurden bestimmt durch folgende Gleichungen, $p(t-t') = s$ gesetzt:

$$53, \quad s - \alpha_2 \alpha_3 y^2 = e_\lambda, \quad s - \alpha_3 \alpha_1 y'^2 = e_\mu, \quad s - \alpha_1 \alpha_2 y''^2 = e_\nu$$

oder:

$$s - \left(\frac{1}{C} - \frac{1}{A}\right)\left(\frac{1}{A} - \frac{1}{B}\right)h^2 y^2 = e_\lambda$$

$$s - \left(\frac{1}{A} - \frac{1}{B}\right)\left(\frac{1}{B} - \frac{1}{C}\right)h^2 y'^2 = e_\mu$$

$$s - \left(\frac{1}{B} - \frac{1}{C}\right)\left(\frac{1}{C} - \frac{1}{A}\right)h^2 y''^2 = e_\nu$$

Die drei Größen ABC , welche die Trägheitsmomente des Körpers bezüglich der drei Hauptachsen des Trägheitsellipsoids darstellen, haben im Allgemeinen von einander verschiedene Werthe. Die besonderen Fälle, in denen dieses nicht eintritt, können durch einfache Grenzübergänge aus dem allgemeinen abgeleitet werden u. sollen später zur Behandlung kommen. Nehmen wir dann fest, dass B die mittlere der drei Größen ABC sei; so werden in jedem Falle die Constanten α_1 u. α_3 dasselbe Zeichen α_2 dagegen stets das diesem entgegengesetzte

Zeichen haben, so dass die Produkte $\alpha_1 \alpha_2$ u. $\alpha_2 \alpha_3$ beide negativ, dagegen $\alpha_1 \alpha_3$ positiv ist. Hieraus folgt, dass $s > e_\mu$, dagegen $s < e_\lambda$ u. $s < e_\nu$ ist, so dass also jedenfalls e_μ die kleinste der drei Größen e , also $e_\mu = e_3$ ist. Die Entscheidung aber, ob $e_\lambda > e_\nu$ oder $e_\lambda < e_\nu$ ist, ist nicht so einfach, da zu diesem wir vielmehr die Größen e durch zwei andere Konstanten aus. Aus den Gleichungen (41) folgt nämlich, wenn man sie bezüglich mit $\frac{y}{A}$, $\frac{y'}{B}$, $\frac{y''}{C}$ multipliziert. d. i.:

$$\frac{y dy}{A} + \frac{y' dy'}{B} + \frac{y'' dy''}{C} = 0 \quad \text{d. i.}$$

$$54) \quad \frac{y^2}{A} + \frac{y'^2}{B} + \frac{y''^2}{C} = \frac{1}{D}$$

Hierin bedeutet D eine willkürliche Konstante. Dieselbe ist zunächst positiv u. liegt ferner zwischen dem größten u. kleinsten Werthe der drei Größen A, B, C . Denn ist z. B.

$$A > C, \text{ so ist: } \frac{1}{D} > \frac{y^2 + y'^2 + y''^2}{A}, \text{ also } \frac{1}{D} > \frac{1}{A} \quad \text{d. h. } D < A$$

$$\frac{1}{D} < \frac{y^2 + y'^2 + y''^2}{C}, \text{ also } \frac{1}{D} < \frac{1}{C} \quad \text{d. h. } D > C$$

Analoges gilt, wenn $A < C$ ist, mithin liegt D stets zwischen A u. C . Aus den Gleichungen (53) folgt ferner:

$$\alpha_1 (\alpha_2 y'^2 - \alpha_3 y^2) = e_\lambda - e_\mu$$

$$55) \quad \alpha_1 (\alpha_2 y''^2 - \alpha_3 y'^2) = e_\mu - e_\nu$$

$$\alpha_2 (\alpha_3 y^2 - \alpha_1 y''^2) = e_\nu - e_\lambda$$

u. aus (54), wenn man $y''^2 = 1 - y^2 - y'^2$ setzt u. (51) beachtet:

$$\alpha_1 y'^2 - \alpha_2 y^2 = \left(\frac{1}{D} - \frac{1}{C}\right) h, \quad \text{analog}$$

$$56) \quad \alpha_2 y''^2 - \alpha_3 y'^2 = \left(\frac{1}{D} - \frac{1}{A}\right) h$$

$$\alpha_3 y^2 - \alpha_1 y''^2 = \left(\frac{1}{D} - \frac{1}{B}\right) h$$

Dividiert man daher die entsprechenden der Gleich. (55) u. (56) durch einander, so wird:

$$\begin{aligned}
 e_\lambda - e_\mu &= \left(\frac{1}{A} - \frac{1}{B}\right) \left(\frac{1}{D} - \frac{1}{C}\right) h^2 = \frac{(B-A)(C-D)}{ABCD} h^2 \\
 57, \quad e_\mu - e_\nu &= \left(\frac{1}{B} - \frac{1}{C}\right) \left(\frac{1}{D} - \frac{1}{A}\right) h^2 = \frac{(C-B)(A-D)}{ABCD} h^2 \\
 e_\nu - e_\lambda &= \left(\frac{1}{C} - \frac{1}{A}\right) \left(\frac{1}{D} - \frac{1}{B}\right) h^2 = \frac{(A-C)(B-D)}{ABCD} h^2
 \end{aligned}$$

Dabei ist h aus dem gegebenen Anfangszustande des Systems nach der Formel zu bestimmen:

$$58, \quad A^2 p^2 + B^2 q^2 + C^2 r^2 = h^2$$

welche aus den Gleichungen (40) einfach dadurch hervorgeht, dass man dieselben quadriert u. addiert. Im Bezug auf die gegenseitige Lage von $ABCD$, dieselben zunächst als verschieden vorausgesetzt, können nun überhaupt nur folgende vier Fälle eintreten:

- 1, $A > B > D > C$
- 2, $A > D > B > C$
- 3, $C > B > D > A$
- 4, $C > D > B > A$.

Aus den Formeln (57) folgt dann, dass im ersten u. vierten Falle: $e_\nu > e_\lambda > e_\mu$, im zweiten u. dritten Falle dagegen: $e_\lambda > e_\nu > e_\mu$ ist. Es folgt daher, wie oben, dass jedenfalls e_μ die kleinste der Größen e ist. Nachdem wir nun fortgesetzt haben, dass zur y' -Achse diejenige Achse des beweglichen Koordinatensystems gewöhlt werden soll, welcher das mittlere Freiheitsmoment zugehört, können wir noch willkürlich der x' -Achse entweder das größte oder das kleinste Freiheitsmoment zuordnen. Wir setzen daher fest, dass im Falle 3: 2 zur x' -Achse diejenige Achse

Das Ellipsoid gewählt werden solle, zu welcher das größte, wenn dagegen $B < D$ ist, diejenige, zu welcher das kleinste Freigheitsmoment gehört. Im ersten Falle ist daher:

$$A > B > D > C, \quad \text{im letzteren aber:}$$

$$A < B < D < C$$

Für beide Fälle aber wird:

$$l_y > l_x > l_z$$

mithin ist bei dieser Annahme:

$$59) \quad l_y = l_1, \quad l_x = l_2, \quad l_z = l_3.$$

Da hier werden die Gleichungen (53):

$$s - a_2 a_3 y^2 = l_2, \quad s - a_3 a_1 y'^2 = l_3, \quad s - a_1 a_2 y''^2 = l_1,$$

aus denen leicht die Ungleichheit gefolgt wird:

$$l_2 > s = p(t - t') > l_3.$$

Hieraus lässt sich auf die Beschaffenheit von t' schließen. Ist nämlich \bar{t} irgend ein reeller Werth von t , so muss sein $l_2 > p(\bar{t} - t') > l_3$. Hierdurch ist aber $\bar{t} - t'$ bis auf das Vorzeichen u. bis auf Perioden bestimmt u. zwar liegt $\bar{t} - t'$ zwischen $\omega + \omega'$ u. ω' d.h. es ist entweder $\bar{t} - t' = \omega' + t''$, oder $t' - \bar{t} = \omega' + t''$, worin t'' eine reelle positive zwischen 0 u. ω gelegene Größe bedeutet, d.h. es ist

$$t' = t_0 \mp \omega'$$

worin t_0 ebenfalls eine reelle Größe ist. Da man aber immer zu t' eine Periode $2\omega'$ hinzusetzen kann, so kann man allgemein annehmen: $t' = t_0 + \omega'$.

Dadurch wird aus (52):

$$f''^2 = \frac{A(C-D)}{2(A-C)(e_2-e_3)} \frac{\sigma_2^2(t-t_0-\omega')}{\sigma^2(t-t_0-\omega')}$$

$$f'^2 = \frac{B(A-D)}{2(B-A)(e_3-e_1)} \frac{\sigma_3^2(t-t_0-\omega')}{\sigma^2(t-t_0-\omega')}$$

$$f''^2 = \frac{C(B-D)}{2(C-B)(e_1-e_2)} \frac{\sigma_1^2(t-t_0-\omega')}{\sigma^2(t-t_0-\omega')}$$

Nun ist also:

$$\frac{\sigma_\alpha(u-\omega')}{\sigma(u-\omega')} = -i \sqrt{e_\alpha - e_3} \frac{\sigma_\alpha u}{\sigma_3 u} \quad \alpha = 1, 2.$$

und

$$\frac{\sigma_3(u-\omega')}{\sigma(u-\omega')} = + \sqrt{e_2 - e_3} \sqrt{e_1 - e_3} \frac{\sigma u}{\sigma_3 u}$$

mithin wird:

$$f'^2 = \frac{A(D-C)}{2(A-C)} \frac{\sigma_1^2(t-t_0)}{\sigma_3^2(t-t_0)}$$

$$60) \quad f'^2 = \frac{(A-D)(D-C)}{ACD^2} h^2 \frac{\sigma^2(t-t_0)}{\sigma_3^2(t-t_0)}$$

$$f''^2 = \frac{C(A-D)}{2(A-C)} \frac{\sigma_2^2(t-t_0)}{\sigma_3^2(t-t_0)}$$

Um nun die definitiven Ausdrücke für f, f', f'' zu erhalten, müssen wir untersuchen, welche Werthe wir den Quadratwurzeln beizulegen haben. Es ist dies gleichbedeutend mit der Bestimmung der positiven Richtungen der Hauptträgheitsachsen. Bisher haben wir nämlich über die Richtungen der einzelnen Achsen nur im Allgemeinen verfügt, ohne eine Festsetzung über den positiven oder negativen Sinn desselben zu treffen. Diese Festsetzung wird aber gegeben durch die Forderung, dass das feste u. das bewegliche Coordinatensystem einander congruent sein sollen. Bei vollen Werthen von t kann f'' niemals verschwinden, da nur α, β, γ die Coordinaten

eines auf der z' -Achse in der Entfernung 1 gelegenen Punktes sind, so heißt dies, dass die z' -Achse mit der positiven z -Achse entweder beständig einen spitzen oder beständig einen stumpfen Winkel bildet, je nachdem man der Quadratwurzel das positive oder negative Zeichen beilegt. Wir wollen y'' positiv nehmen, wenn $A > C$, dagegen negativ, wenn $A < C$ ist. Das Vorzeichen von y können wir willkürlich wählen, da wir durch Wahlung von t_0 immer zu stets bewirken können, dass die Quadratwurzel aus der Constanten ihr Zeichen wechselt. Wir geben daher y das negative Vorzeichen. Dadurch ist aber das Vorzeichen von y' bestimmt, wie einerseits aus allgemeinen Bemerkungen pag. 93. 94. hervorgeht, was aber auch einfach in folgender Weise gezeigt werden kann. Es seien in den Ausdrücken:

$$y = - \sqrt{\frac{A(D-C)}{D(A-C)}} \frac{\sigma_1}{\sigma_3}$$

$$y' = \frac{\varepsilon h}{D} \sqrt{\frac{(A-D)(D-C)}{AC}} \frac{\sigma_1}{\sigma_3}$$

$$y'' = \varepsilon' \sqrt{\frac{C(A-D)}{D(A-C)}} \frac{\sigma_2}{\sigma_3}$$

die Quadratwurzel positiv, dagegen $\varepsilon = \pm 1$, $\varepsilon' = \pm 1$.

Dann ist wegen: $\frac{d}{dt} \frac{\sigma_1}{\sigma_3} = \frac{\sigma_1 \sigma_2}{\sigma_3^2}$:

$$\begin{aligned} \frac{dy'}{dt} &= - \frac{\varepsilon}{\varepsilon'} h \sqrt{\frac{(A-D)(D-C)}{ACD^2}} \sqrt{\frac{D(A-C)}{A(D-C)}} \sqrt{\frac{D(A-C)}{C(A-D)}} y y'' \\ &= - \frac{\varepsilon}{\varepsilon'} h \sqrt{\frac{(A-C)^2}{A^2 C^2}} y y'' \end{aligned}$$

Da diese Wurzel positiv sein soll, so ist ihr Werth, im Falle $A > C$: $\frac{A-C}{AC} = \frac{1}{C} - \frac{1}{A}$; dagegen im Falle $A < C$:

$\frac{C-A}{AC} = \frac{1}{A} - \frac{1}{C}$. Nun ist aber nach (41) in jedem Falle:

$$\frac{dy'}{dt} = \left(\frac{1}{A} - \frac{1}{C} \right) h y y''$$

Folglich ist:

wenn $A > C$: $\frac{\varepsilon}{\varepsilon'} = 1$.

" $A < C$: $\frac{\varepsilon}{\varepsilon'} = -1$.

Da nun aber vorausgesetzt worden war, dass $\varepsilon' = +1$ oder $= -1$ sein sollte, je nachdem $A > C$ oder $A < C$ ist, so folgt hieraus, dass für jeden Fall $\varepsilon = +1$ ist. Mithin erhalten wir:

$$y = - \sqrt{\frac{A(D-C)}{D(A-C)}} \frac{b_1 (t-t_0)}{b_2 (t-t_0)}$$

$$61) \quad y' = h \sqrt{\frac{(A-D)(D-C)}{ACD^2}} \frac{b_1 (t-t_0)}{b_2 (t-t_0)}$$

$$y'' = \pm \sqrt{\frac{C(A-D)}{D(A-C)}} \frac{b_2 (t-t_0)}{b_1 (t-t_0)}$$

Hierin ist den Wurzelgrößen ihr positiver Werth beizulegen u. in der letzten Gleichung das positive oder negative Vorzeichen zu nehmen, je nachdem $A > C$ oder $A < C$ ist. Damit sind die Größen y, y', y'' u. damit die positiven Richtungen der Hauptträgheitsachsen bestimmt.

Wir gehen jetzt zur Berechnung von $\alpha, \beta, \alpha', \beta', \alpha'', \beta''$ über:

$$62) \quad d \log(\alpha + \beta i) = \frac{\alpha d\alpha + \beta d\beta}{\alpha^2 + \beta^2} + \frac{\alpha d\beta - \beta d\alpha}{\alpha^2 + \beta^2} i$$

Nun ist aber:

$$\frac{d\alpha}{dt} = \alpha' r - \alpha'' q$$

$$\frac{d\beta}{dt} = \beta' r - \beta'' q$$

mithin:

$$\alpha \frac{d\beta}{dt} - \beta \frac{d\alpha}{dt} = (\alpha\beta' - \beta\alpha') r + (\beta\alpha'' - \alpha\beta'') q \\ = \gamma'' r + \gamma' q$$

oder da nach (40): $r = \frac{h}{c} \gamma''$, $q = \frac{h}{B} \gamma'$ ist:

$$\alpha \frac{d\beta}{dt} - \beta \frac{d\alpha}{dt} = h \left(\frac{\gamma'^2}{B} + \frac{\gamma''^2}{c} \right), \text{ also nach (54):} \\ = h \left(\frac{1}{B} - \frac{\gamma^2}{A} \right) \\ = h \left(\frac{1}{B} - \frac{1}{A} + \frac{1-\gamma^2}{A} \right)$$

Folglich geht Gl. (62) über in:

$$\frac{d \log(\alpha + \beta i)}{dt} = - \frac{\gamma \frac{d\gamma}{dt}}{1-\gamma^2} + i h \frac{\frac{1}{B} - \frac{1}{A} + \frac{1-\gamma^2}{A}}{1-\gamma^2} \\ 63) \quad = \frac{ih}{A} + \frac{\gamma \frac{d\gamma}{dt} + ih \left(\frac{1}{A} - \frac{1}{B} \right)}{\gamma^2 - 1}$$

Den zweiten Ausdruck der rechten Seite bringen wir jetzt auf die Form: $\frac{1}{2} \frac{\varphi'(t) + \varphi'(t_0)}{\varphi(t) - \varphi(t_0)}$. Setzen wir dann:

$$64) \quad \gamma^2 = \frac{A(B-C)}{B(A-C)} \frac{\sigma_1^2(t-t_0)}{\sigma_2^2(t-t_0)} = \varphi(t)$$

so haben wir ein Argument t , zu bestimmen, für welches

$$\varphi(t) = 1 \quad \text{und} \quad \varphi'(t) = 2 i h \left(\frac{1}{A} - \frac{1}{B} \right)$$

ist. Dies ist in der That möglich. Es folgt nämlich aus (64)

$$\varphi'(t) = 2 \gamma \frac{d\gamma}{dt} = 2 \frac{B-C}{Bc} h \gamma \gamma' \gamma''$$

also für $t = t_0$, für welchen Werth $\gamma^2 = 1$ ist:

$$65) \quad \varphi'(t_0) = 4 \left(\frac{B-C}{Bc} \right)^2 h^2 \gamma'^2 \gamma''^2$$

Nun ist aber ferner, wie aus den Gleichungen n. (54)

folgt: für $t = t_0$: $\gamma'^2 + \gamma''^2 = 0$ und:

$$\frac{\gamma'^2}{B} + \frac{\gamma''^2}{c} = \frac{1}{B} - \frac{1}{A}$$

mithin:

$$\gamma'^2 = -\gamma''^2 \\ \gamma'^2 \left(\frac{1}{B} - \frac{1}{c} \right) = \frac{1}{B} - \frac{1}{A}$$

Setzt man diese Ausdrücke für y'' in (65) ein, so erhält:

$$\varphi'(t_1) = -4h^2 \left(\frac{1}{\delta} - \frac{1}{A} \right)^2 \quad \text{mithin}$$

$$\varphi'(t_1) = \pm 2hi \left(\frac{1}{A} - \frac{1}{\delta} \right)$$

Es ist daher in der That möglich ein Argument t , so zu bestimmen, dass $\varphi(t_1) = 1$ u. $\varphi'(t_1) = 2hi \left(\frac{1}{A} - \frac{1}{\delta} \right)$ wird.

Hieraus wird also:

$$\frac{d \log(\alpha + \beta i)}{dt} = \frac{hi}{A} + \frac{1}{2} \frac{\varphi'(t) + \varphi'(t_1)}{\varphi(t) - \varphi(t_1)}$$

Da $\varphi(t)$ unendlich wird, wenn $\sigma_3(t - t_0) = 0$ ist d.h. für $t = t_0 + \omega'$, so läßt sich vorstehende Gleichung umformen in folgende:

$$\begin{aligned} \frac{d \log(\alpha + \beta i)}{dt} &= \frac{hi}{A} + \frac{\sigma_3'(t - t_1)}{\sigma_3(t - t_1)} - \frac{\sigma_3'(t - t_0 - \omega')}{\sigma_3(t - t_0 - \omega')} + \frac{\sigma_3'(t_1 - t_0 - \omega')}{\sigma_3(t_1 - t_0 - \omega')} \\ &= \frac{hi}{A} + \frac{\sigma_3'(t - t_1)}{\sigma_3(t - t_1)} - \frac{\sigma_3'(t - t_0)}{\sigma_3(t - t_0)} + \frac{\sigma_3'(t_1 - t_0)}{\sigma_3(t_1 - t_0)} \end{aligned}$$

Also integriert:

$$66) \quad \alpha + \beta i = C \frac{\sigma_3(t - t_1)}{\sigma_3(t - t_0)} e^{(t - t_0) \left(\frac{hi}{A} + \frac{\sigma_3'(t_1 - t_0)}{\sigma_3(t_1 - t_0)} \right)}$$

Es bleibt noch außer der Constanten die genauere Bestimmung der Größe t_1 übrig. Nun ist aber:

$$\varphi(t) = \frac{A(\delta - C)}{\delta(A - C)} \frac{p(t - t_0) - e_1}{p(t - t_0) - e_3}$$

Daher:

$$\varphi'(t) = \frac{A(\delta - C)}{\delta(A - C)} \frac{(e_1 - e_3) p'(t - t_0)}{(p(t - t_0) - e_3)^2}$$

also für $t = t_1$:

$$\frac{p(t_1 - t_0) - e_1}{p(t_1 - t_0) - e_3} = \frac{\delta(A - C)}{A(\delta - C)} \quad \text{oder:}$$

$$67) \quad \frac{e_1 - e_3}{p(t_1 - t_0) - e_3} = - \frac{C(A - \delta)}{A(\delta - C)}$$

und:

$$\frac{(l_1 - l_3) p'(t_1 - t_0)}{(p(t_1 - t_0) - l_3)^2} = 2hi \left(\frac{1}{A} - \frac{1}{D} \right) \frac{\partial(A-C)}{A(D-C)} \quad \text{oder:}$$

$$p'(t_1 - t_0) = 2hi \frac{(l_1 - l_3)(D-C)(A-C)}{C^2(D-A)}$$

Hierdurch ist die Berechnung von t , darauf zurückgeführt, ein Argument zu bestimmen, für welches die Funktion p einen vorgeschriebenen Werth u. ihre Ableitung einen gegebenen Werth besitzt. Da nun entweder $A > B > D > C$ oder $A < B < D < C$ ist, so ist, wie aus (67) hervorgeht, in jedem Falle $p(t_1 - t_0) < l_3$, dagegen $p'(t_1 - t_0)$ im ersten Falle gleich einer negativ imaginären, im zweiten Falle gleich einer positiv imaginären Größe d.h. es liegt nach der Tabelle pag. im ersten Falle $t_1 - t_0$ zwischen 0 u. ω' , im zweiten Falle zwischen 0 u. $-\omega'$ d.h. es ist:

$$t_1 - t_0 = \omega i,$$

wo ω eine reelle Größe ist, die zwischen $+\frac{\omega'}{i}$ u. $-\frac{\omega'}{i}$ liegt. Damit ist aber die Bestimmung von t gegeben.

Hieraus ist:

$$68) \quad \alpha + \beta i = C \frac{\zeta(t - t_0 - \omega i)}{\zeta_3(t - t_0)} e^{i(t - t_0) \left\{ \frac{h}{A} + \frac{\zeta'_3(\omega i)}{i \zeta_3(\omega i)} \right\}}$$

In derselben Weise lassen sich auch Ausdrücke für $\alpha' + \beta' i$ u. $\alpha'' + \beta'' i$ ableiten, dabei würde es aber nöthig sein zu untersuchen, ob die bei der Integration auftretenden Constanten bei allen drei Größen dieselben sind oder nicht. Es ist daher die Bemerkung von Wichtigkeit, dass sich $\alpha' + \beta' i$ u. $\alpha'' + \beta'' i$ rational durch $\gamma \gamma''$ u. $\alpha + \beta i$ ausdrücken lassen. Es ist nämlich:

$$\begin{aligned}
 \frac{\alpha' + \beta' i}{\alpha + \beta i} &= \frac{\alpha \alpha' + \beta \beta' + i(\alpha \beta' - \alpha' \beta)}{\alpha^2 + \beta^2} \\
 &= \frac{-\gamma \gamma' + i \gamma''}{1 - \gamma^2} \\
 69, \quad \frac{\alpha'' + \beta'' i}{\alpha + \beta i} &= \frac{-\gamma \gamma'' - i \gamma'}{1 - \gamma^2}
 \end{aligned}$$

Durch Einsetzen der Werthe von $\gamma \gamma' \gamma''$ u. $\alpha + \beta i$ würde man hieraus die Werthe für $\alpha' + \beta' i$ u. $\alpha'' + \beta'' i$ erhalten. Ehe wir dies aber thun, formen wir die Ausdrücke von $\gamma \gamma' \gamma''$ selbst noch etwas um. Es ist nämlich aus (61) für $t = t_1$

$$\begin{aligned}
 \frac{\sigma_2^2(wi)}{\sigma_1^2(wi)} &= \frac{A(D-C)}{D(A-C)} \quad \text{ferner wegen } \frac{B-C}{BC} \gamma'^2 = \frac{D-A}{AD} \\
 \frac{\sigma_2^2(wi)}{\sigma_1^2(wi)} &= \frac{BCD}{(B-C)(C-D)} \frac{1}{h^2} \quad \text{u. wegen } \gamma''^2 = -\gamma'^2 \\
 \frac{\sigma_2^2(wi)}{\sigma_1^2(wi)} &= \frac{B(A-C)}{A(B-C)}
 \end{aligned}$$

Hieraus folgt:

$$\begin{aligned}
 70, \quad \frac{\sigma_2(wi)}{\sigma_1(wi)} &= \varepsilon \sqrt{\frac{A(D-C)}{D(A-C)}} \\
 \frac{\sigma_2(wi)}{\sigma_1(wi)} &= \varepsilon' \sqrt{\frac{B(D-C)}{D(B-C)}} \\
 \frac{\sigma(wi)}{\sigma_1(wi)} &= \varepsilon'' i \frac{C}{h} \sqrt{\frac{AB}{(A-C)(B-C)}}
 \end{aligned}$$

Hierin ist den Wurzelgrößen der positive Werth beizulegen. Ferner sind die Quotienten $\frac{\sigma_2 u}{\sigma_1 u}$ u. $\frac{\sigma u}{\sigma_1 u}$ für Werthe von u innerhalb der Grenzen ω' u. $-\omega'$ positiv, mithin ist $\varepsilon = \varepsilon' = +1$. Dagegen ist der Quotient $\frac{\sigma u}{\sigma_1 u}$ positiv oder negativ imaginär, je nachdem u zwischen 0 u. ω' oder zwischen 0 u. $-\omega'$ liegt d.h. es ist $\varepsilon'' = +1$, wenn $A > C$ u. $\varepsilon'' = -1$, wenn $A < C$ ist. Die vorstehenden Ausdrücke

sind nun aber noch nicht die in den Formeln für ffj vorkommenden Constanten; jedoch erhalten wir diese leicht aus jenen. Nach der zweiten Gleichung (57) ist nämlich, wenn der Wurzel ihr positiver Werth beigesetzt wird:

$$\sqrt{e_1 - e_3} = h \sqrt{\frac{(B-C)(A-D)}{ABCD}}$$

Multiplizieren wir nun diese Gleichung mit der zweiten resp. der dritten Gleichung (70), so ergibt sich:

$$\sqrt{e_1 - e_3} \frac{G_2(wi)}{G_1(wi)} = h \sqrt{\frac{(A-D)(D-C)}{ACD^2}}$$

$$\sqrt{e_1 - e_3} \frac{G(wi)}{iG_1(wi)} = \pm \sqrt{\frac{C(A-D)}{D(A-C)}}$$

Mit Berücksichtigung dieser Werthe nehmen daher die Formeln (61) die Gestalt an:

$$y = - \frac{G_2(wi)}{G_1(wi)} \frac{G_1(t-t_0)}{G_3(t-t_0)}$$

$$71) \quad y' = \sqrt{e_1 - e_3} \frac{G_2(wi)}{G_1(wi)} \frac{G(t-t_0)}{G_3(t-t_0)}$$

$$y'' = \sqrt{e_1 - e_3} \frac{G(wi)}{iG_1(wi)} \frac{G_2(t-t_0)}{G_3(t-t_0)}$$

Es ist nun:

$$1 - y^2 = \frac{G_1^2(wi) G_2^2(t-t_0) - G_2^2(wi) G_1^2(t-t_0)}{G_1^2(wi) G_3^2(t-t_0)} \quad \text{also nach Ellipt. Funct. pag.}$$

$$1 - y^2 = (e_1 - e_3) \frac{G(t-t_0+wi) G(t-t_0-wi)}{G_1^2(wi) G_3^2(t-t_0)}$$

Ferner:

$$-yy' + iy'' = \sqrt{e_1 - e_3} \frac{G(t-t_0) G_1(t-t_0) G_2(wi) G_3(wi) + G_2(t-t_0) G_3(t-t_0) G(wi) G_1(wi)}{G_1^2(wi) G_3^2(t-t_0)}$$

$$= \sqrt{e_1 - e_3} \frac{G(t-t_0+wi) G_1(t-t_0-wi)}{G_1^2(wi) G_3^2(t-t_0)}; \quad \text{fr. Ellipt. Funct. pag.}$$

Endlich:

$$-y y'' - i y' = \frac{\sqrt{e_1 - e_3}}{i} \frac{\sigma_1(t-t_0) \sigma_2(t-t_0) \sigma(wi) \sigma_3(wi) + \sigma(t-t_0) \sigma_2(t-t_0) \sigma_1(wi) \sigma_3(wi)}{\sigma_1^2(wi) \sigma_3^2(t-t_0)}$$

$$\text{d.h. } -y y'' - i y' = \frac{\sqrt{e_1 - e_3}}{i} \frac{\sigma(t-t_0 + wi) \sigma_3(t-t_0 - wi)}{\sigma_1^2(wi) \sigma_3^2(t-t_0)}$$

Hiernach wird nun aus den Gleichungen (64):

$$\frac{\alpha' + \beta' i}{\alpha + \beta i} = \frac{1}{\sqrt{e_1 - e_3}} \frac{\sigma_1(t-t_0 - wi)}{\sigma(t-t_0 - wi)}$$

$$\frac{\alpha'' + \beta'' i}{\alpha + \beta i} = \frac{1}{i \sqrt{e_1 - e_3}} \frac{\sigma_3(t-t_0 - wi)}{\sigma(t-t_0 - wi)}$$

Aus diesen Formeln geht hervor, dass sowohl die Constante $\alpha + \beta i$ als der Exponentialfactor für die drei Ausdrücke $\alpha + \beta i$, $\alpha' + \beta' i$, $\alpha'' + \beta'' i$ dieselben sind. Es wird daher, wenn wir zur Abkürzung setzen:

$$72) \quad \frac{h}{A} + \frac{\sigma_3'(wi)}{i \sigma_3(wi)} = v$$

$$\alpha + \beta i = C \frac{\sigma(t-t_0 - wi)}{\sigma_3(t-t_0)} e^{i v (t-t_0)}$$

$$\alpha' + \beta' i = \frac{C}{\sqrt{e_1 - e_3}} \frac{\sigma_1(t-t_0 - wi)}{\sigma_3(t-t_0)} e^{i v (t-t_0)}$$

$$\alpha'' + \beta'' i = \frac{C}{i \sqrt{e_1 - e_3}} \frac{\sigma_3(t-t_0 - wi)}{\sigma_3(t-t_0)} e^{i v (t-t_0)}$$

Es bleibt also nur noch die Constante C zu bestimmen. Dazu beachte man, dass für $t = t_0$ $y' = 0$, also $\alpha'^2 + \beta'^2 = 1$ ist, d.h. es ist $\alpha' + \beta' i$ eine complexe Größe, deren absoluter Betrag für $t =$ gleich 1 ist. Hiernach für $t = t_0$ die Form $e^{\mu i}$ besitzt. Also ist:

$$e^{\mu i} = \frac{C}{\sqrt{e_1 - e_3}} \sigma_1(wi)$$

Folglich ergibt sich:

$$\alpha + \beta i = \sqrt{e_1 - e_3} \frac{\bar{G}_1(t-t_0 - \omega i)}{\bar{G}_1(\omega i) \bar{G}_3(t-t_0)} e^{i[\mu + \nu(t-t_0)]} l$$

$$(73) \quad \alpha' + \beta' i = \frac{\bar{G}_1(t-t_0 - \omega i)}{\bar{G}_1(\omega i) \bar{G}_3(t-t_0)} e^{i[\mu + \nu(t-t_0)]} l$$

$$\alpha'' + \beta'' i = \frac{\bar{G}_3(t-t_0 - \omega i)}{i \bar{G}_1(\omega i) \bar{G}_3(t-t_0)} e^{i[\mu + \nu(t-t_0)]} l$$

Um die Bedeutung der Constanten μ zu erkennen, genügt es die mechanische Bedeutung von t_0 anzugeben. t_0 ist charakterisirt als derjenige Werth von t , für welchen y' verschwindet. zwar indem es vom Negativen ins Positive übergeht. Da aber y' proportional der Größe q war, so bezeichnet t_0 auch einen der Momente, in welchem q verschwindet. Nun waren p, q, r die auf das bewegliche Achsensystem bezogenen Coordinaten eines Punktes S , welcher, auf der zur Zeit t stattfindenden Drehungsachse gelegen, durch seine Entfernung vom Anfangspunkte die augenblickliche Rotationsgeschwindigkeit angibt. Hithin bezeichnet t_0 einen derjenigen Momente, in welchem die augenblickliche Drehungsachse in die $x'z'$ Ebene fällt u. zwar beim Übergange von der negativen zur positiven Seite derselben. Diese Momente kehren periodisch wieder, da y' die reelle Periode 4ω hat.

Durch die Formeln (71) u. (73) ist nun unsere Aufgabe vollständig gelöst, da man aus den Formeln (73) unmittelbar die Werthe von $\alpha, \beta, \alpha', \beta', \alpha'', \beta''$ u. somit aus den Gleichungen (1) auch die Werthe für x, y, z als Functionen der Zeit erhalten kann.

Überblicken wir noch einmal den eingeschlagenen Gang

Der Untersuchung, so war derselbe kurz folgender: Nachdem
 wir das lineare Bewegungsmoment des Körpers in Bezug
 auf den Aufangspunkt als festen Punkt berechnet, nah-
 men wir das im Raume feste Achsensystem so an, dass
 die Komponenten des Bewegungsmomentes bezüglich
 der x u. y Achse verschwinden u. daher die denselbe reprä-
 sentierende Strecke mit der z Achse u. zwar mit der
 positiven Richtung derselben zusammenfiel. Ebenso nahmen
 wir als spezielles bewegliches Achsensystem die drei Haupt-
 trägheitsachsen u. setzten fest, dass nur z' Achse das mit-
 telste Trägheitsmoment gehören solle. Die Einföhrung der
 Integrationskonstanten B mahlte bedroht
 Der beiden anderen Achsen eine Unterscheidung entwen-
 dig. Wir setzten dabei fest, dass im Falle $B > D$ nur x' -
 Achse diejenige Achse genannt werden solle, welcher das
 größte Trägheitsmoment zugehört, im Falle $B < D$ aber
 umgekehrt. Die drei für $xx'y''$ abgeleiteten Differential-
 gleichungen ergaben zunächst die Werthe von $y''y''y''$.
 Auf Grund der vorher getroffenen Entscheidung konnten
 dann die Vorzeichen der in $xx'y''$ auftretenden Quadrat-
 wureln u. mithin die positiven Richtungen der Haupt-
 trägheitsachsen in eindeutiger Weise so bestimmt werden,
 dass die Forderung der Congruenz des beweglichen u. des festen
 Koordinatensystems erfüllt war. Dadurch waren die
 Hauptschwierigkeiten des Problems beseitigt u. es konnten
 mit leichter Mühe die sich für die 9 Größen $\alpha, \beta, \gamma, \dots, \gamma''$

ergebenden Ausdrücke mit Hilfe von allgemeinen Formeln aus der Theorie der elliptischen Functionen auf ihre definitive Form gebracht werden.

Leinstliche Formeln (71) - (73) besitzen denselben Nenner, ferner können in denselben leinstliche ζ -Functionen vor, sowohl mit reellem, als mit rein imaginärem Argumente, endlich können auch ζ -Functionen mit complexem Argument vor, aber unter diesen fehlt allein die Function ζ_2 . Es ist daher bemerkenswerth, dass man auch solche Formeln erhält, welche $\zeta_2(t-t_0 - \omega i)$ enthalten, wenn man noch die Coordinaten eines vierten Punktes, nämlich des Punktes S berechnet, welcher die Lage der instantanen Drehungsachse u. die Größe der Rotationsgeschwindigkeit um dieselbe bestimmt. - Die Coordinaten desselben bezogen auf das feste Achsensystem seien PQR dann ist:

$$\begin{aligned} P &= \alpha p + \alpha' q + \alpha'' r \\ 74, \quad Q &= \beta p + \beta' q + \beta'' r \\ R &= \gamma p + \gamma' q + \gamma'' r \end{aligned}$$

Hieraus folgt zuerst mit α, β, γ nach (40) u. (54):

$$75, \quad R = \frac{k}{D}$$

d. h. R ist constant d. h. der Punkt S bleibt beständig in einer zur xy -Ebene parallelen Ebene. Diese Ebene ist daher absolut fest im Räume u. sie heißt daher die unveränderliche Ebene.

Ferner ist:

$$P + iQ = (\alpha + \beta i)p + (\alpha' + \beta' i)q + (\alpha'' + \beta'' i)r$$

$$\frac{P + iQ}{\alpha + \beta i} = h \left(\frac{\gamma}{A} + \frac{-\gamma\gamma' + i\gamma''}{1 - \gamma^2} \frac{\gamma'}{B} + \frac{-\gamma\gamma'' - i\gamma'}{1 - \gamma^2} \frac{\gamma''}{C} \right)$$

$$\frac{P + iQ}{\alpha + \beta i} = \frac{h}{1 - \gamma^2} \left\{ \frac{\gamma}{A} - \gamma \left(\frac{\gamma^2}{A} + \frac{\gamma'^2}{B} + \frac{\gamma''^2}{C} \right) + \left(\frac{1}{B} - \frac{1}{C} \right) i\gamma\gamma'' \right\}$$

$$76) \quad = \frac{h}{1 - \gamma^2} \left\{ \left(\frac{1}{A} - \frac{1}{B} \right) \gamma + \left(\frac{1}{B} - \frac{1}{C} \right) i\gamma\gamma'' \right\}$$

Nun war:

$$\frac{\sigma_2(wi)}{\sigma_1(wi)} = \sqrt{\frac{A(B-C)}{B(A-C)}} \quad ; \quad \frac{\sigma_2(wi)}{\sigma_1(wi)} = \sqrt{\frac{B(B-C)}{B(A-C)}} \quad ; \quad \frac{\sigma_2(wi)}{\sigma_1(wi)} = + \frac{iC}{h} \sqrt{\frac{AB}{(A-C)(B-C)}}$$

$$e_1 - e_3 = \frac{(B-C)(A-B)}{ABC} h^2$$

Hieraus folgt:

$$\frac{\sigma_1(wi)\sigma_2(wi)}{\sigma_1(wi)\sigma_3(wi)} = + \frac{iCB}{h} \sqrt{\frac{1}{(B-C)^2}}$$

Hierin ist das Zeichen + oder - zu nehmen, je nachdem $A > C$ oder $A < C$ ist, da aber ferner die Quadratwurzel positiv sein soll, so ist ihr Werth im ersten Falle $\frac{1}{B-C}$, im zweiten $\frac{1}{C-B}$; mithin ergibt sich: beiden Fällen:

$$\frac{\sigma_1(wi)\sigma_2(wi)}{\sigma_1(wi)\sigma_3(wi)} = \frac{iBC}{h(B-C)}$$

oder:

$$h i \left(\frac{1}{B} - \frac{1}{C} \right) = \frac{\sigma_1(wi)\sigma_3(wi)}{\sigma_1(wi)\sigma_2(wi)}$$

Ferner ist:

$$h \left(\frac{1}{A} - \frac{1}{B} \right) = \frac{(e_1 - e_3)BC}{h(B-C)} = i(e_1 - e_3) \frac{\sigma_1(wi)\sigma_2(wi)}{\sigma_1(wi)\sigma_3(wi)}$$

Mithin geht die Gleichung (76), wenn wir zugleich für $\gamma\gamma''$ ihre Werthe aus (71) einsetzen, in folgende über:

$$\frac{P + Qi}{\alpha + \beta i} = \frac{\sigma_2(t - t_0 - wi)}{i\sigma_1(t - t_0 - wi)}$$

folglich:

$$77) \quad P + Qi = \sqrt{e_1 - e_3} \frac{\sigma_2(t - t_0 - wi)}{i\sigma_1(wi)\sigma_3(t - t_0)} e^{i[\mu + \nu(t - t_0)]}$$

Führen wir nun in unsere Formeln \mathcal{I} -Funktionen ein, indem wir setzen:

$$\frac{t-t_0}{2\omega} = v, \quad \frac{w}{2\omega} = v', \quad \frac{h}{A} + \frac{1}{2\omega} \frac{\mathcal{I}'_2(v'i)}{\mathcal{I}_2(v'i)} = 1, \text{ so wird:}$$

$$79, \quad \begin{cases} y = - \frac{\mathcal{I}_2(v'i) \mathcal{I}'_1(v)}{\mathcal{I}_1(v'i) \mathcal{I}_3(v)} \\ y' = \frac{\mathcal{I}_2(v'i) \mathcal{I}(v)}{\mathcal{I}_1(v'i) \mathcal{I}_3(v)} \\ y'' = \frac{\mathcal{I}(v'i) \mathcal{I}_2(v)}{i \mathcal{I}_1(v'i) \mathcal{I}_3(v)} \end{cases}$$

$$80, \quad \begin{cases} \alpha + \beta i = \frac{\mathcal{I}_2(0) \mathcal{I}(v-v'i)}{\mathcal{I}_1(v'i) \mathcal{I}_3(v)} e^{i\{\mu + 2\omega \lambda v\}} \\ \alpha' + \beta' i = \frac{\mathcal{I}_2(0) \mathcal{I}_1(v-v'i)}{\mathcal{I}_1(v'i) \mathcal{I}_3(v)} e^{i\{\mu + 2\omega \lambda v\}} \\ \alpha'' + \beta'' i = \frac{\mathcal{I}_1(0) \cdot \mathcal{I}_2(v-v'i)}{i \mathcal{I}_1(v'i) \mathcal{I}_3(v)} e^{i(\mu + 2\omega \lambda v)} \end{cases}$$

$$81, \quad \begin{cases} P + iQ = \frac{\mathcal{I}'_0(0) \mathcal{I}_2(v-v'i)}{2\omega i \cdot \mathcal{I}_1(v'i) \mathcal{I}_3(v)} e^{i(\mu + 2\omega \lambda v)} \\ R = \frac{h}{\mathcal{D}} \end{cases}$$

Diese Formeln lösen das vorgelegte Problem vollständig u. in dieser Gestalt sind sie besonders geeignet, die Bewegung des Körpers darzustellen. Da sämtliche \mathcal{I} -Funktionen die reelle Periode 2 in Bezug auf v d.h. 4ω in Bezug auf t haben (\mathcal{I}_1 u. \mathcal{I}_3 besitzen bereits die Periode 1 resp. 2ω), so erhalten y, y', y'' dieselben Werthe, wenn man t um 4ω vermehrt, dagegen ändern sich die anderen Größen nur gewisse multiplikative Constanten. Nun ist:

$$\begin{aligned} x + yi &= (\alpha + \beta i) x' + (\alpha' + \beta' i) y' + (\alpha'' + \beta'' i) z' \\ z &= \gamma x' + \gamma' y' + \gamma'' z', \end{aligned}$$

mithin ist z eine periodische Funktion von t mit der reellen Periode 4ω ; dagegen ist $x+yi$ keine periodische Funktion.

Setzen wir aber:

$$\bar{x} + \bar{y}i = (\bar{\alpha} + \bar{\beta}i)x' + (\bar{\alpha}' + \bar{\beta}'i)y' + (\bar{\alpha}'' + \bar{\beta}''i)z'$$

u. berechnen mit $\bar{\alpha} + \bar{\beta}i, \dots$ die vom Exponentialfaktor freien Ausdrücke auf der rechten Seite der Gleichungen (80), so sind $\bar{x} + \bar{y}i$ u. somit auch \bar{x} u. \bar{y} selbst reell-periodische Funktionen von t mit der Periode 4ω u. es wird, da:

$$x + yi = (\bar{x} + \bar{y}i) e^{(\mu + 2\omega \lambda v)i}$$

sich:

$$x = \bar{x} \cos(\mu + 2\omega \lambda v) - \bar{y} \sin(\mu + 2\omega \lambda v)$$

$$y = \bar{x} \sin(\mu + 2\omega \lambda v) + \bar{y} \cos(\mu + 2\omega \lambda v)$$

Diese Gleichungen sagen folgendes aus:

Denkt man sich neben dem im Raume festen Koordinatensystem noch ein anderes, dessen Ursprung u. z-Achse identisch sind mit dem Aufgangspunkt u. der z-Achse des ersten, dessen x u. y Achsen aber beweglich sind u. zwar so, dass sie zur Zeit t mit der x -u. y -Achse des festen Systems den Winkel $\mu + 2\omega \lambda v$ bilden, so ist die Bewegung eines jeden Punktes unseres Körpers in Bezug auf dieses bewegliche Achsensystem eine periodische, so dass nach Verlauf einer Zeit 4ω jeder Punkt in Bezug auf dieses Achsensystem dieselbe Stelle wieder einnimmt wie am Anfang der Bewegung. Die absolute Bewegung des Körpers im Raume wird aber nur dann eine periodische sein, wenn die beiden Perioden 4ω u. $\frac{2\pi}{\lambda}$ in einem rationalen Verhältnisse stehen.

Wir erhalten noch:

$$\bar{\alpha} = \frac{\mathcal{I}_2(0) \{ \mathcal{I}(v-v'i) + \mathcal{I}(v+v'i) \}}{2 \mathcal{I}_1(v'i) \mathcal{I}_3(v)}$$

$$\bar{\beta} = \frac{\mathcal{I}_2(0) \{ \mathcal{I}(v-v'i) - \mathcal{I}(v+v'i) \}}{2i \mathcal{I}_1(v'i) \mathcal{I}_3(v)} \quad \text{etc.}$$

In dieser Gestalt hat Ferrer die Formeln angegeben, nur dass er statt der \mathcal{I} -Funktionen seine Funktionen \mathcal{O} u. \mathcal{H} verwendete.

Wir wenden uns jetzt zur genaueren Bestimmung der Constanten w , für welche war:

$$82. \quad \frac{\sigma_2(wi)}{\sigma_2(wi)} = \sqrt{\frac{A(B-C)}{B(A-C)}} = \varepsilon$$

Hieraus geht hervor, dass ε unabhängig ist von den Integrationsconstanten k u. D u. ferner, dass ε reell u. kleiner als 1 ist, dann es ist:

$$1 - \varepsilon^2 = \frac{C(A-B)}{B(A-C)} > 0$$

Wir setzen zunächst voraus, dass alle Freigheitsmomente von einander verschieden seien, dann ist:

$$0 < \varepsilon < 1.$$

Ferner gilt die Gleichung $d \frac{\sigma_2 u}{\sigma_2 u} = (e_2 - e_3) \frac{\sigma_1 u \sigma_3 u}{\sigma_2^2 u} du$,

mithin, wenn wir w als Variable ansehen:

$$d \frac{\sigma_2(wi)}{\sigma_2(wi)} = - (e_2 - e_3) \frac{\sigma_1(wi) \sigma_3(wi)}{i \sigma_2^2(wi)} dw.$$

Hierin ist die rechte Seite negativ für Werthe von w zwischen 0 u. $\frac{\omega'}{i}$; dann es ist $\frac{1}{i} \sigma(wi)$ für Werthe von w zwischen 0 u. $\frac{\omega'}{i}$ reell u. positiv, ebenso $\sigma_1(wi)$ u. σ_2 ist reell, mithin sagt unsere Gleichung aus, dass, während w von 0 bis $\frac{\omega'}{i}$ wächst $\frac{\sigma_2(wi)}{\sigma_2(wi)}$ beständig abnimmt. Setzen wir nun:

83. $\frac{\sigma_3(w)}{\sigma_2(w)} = \xi$

wegen ξ der Differentialgleichung:

$$\left(\frac{d\xi}{dw}\right)^2 = (1-\xi^2)((e_1-e_3) - (e_1-e_2)\xi^2)$$

... wenn wir setzen:

$$\frac{e_2-e_3}{e_1-e_3} = K, \quad \text{also} \quad \frac{e_1-e_2}{e_1-e_3} = 1-K$$

so wird:

$$\frac{d\xi}{dw} = -\sqrt{e_1-e_3} \sqrt{(1-\xi^2)(1-(1-K)\xi^2)}$$

worin die Wurzeln positiv zu nehmen sind u. das
Zeichen - gesetzt werden muß, da mit wachsendem w ξ
abnimmt. Hieraus folgt nun, da für $w=0$ $\xi=1$ ist:

$$84) \quad w = \frac{1}{\sqrt{e_1-e_3}} \int_{\xi}^1 \frac{d\xi}{\sqrt{(1-\xi^2)(1-(1-K)\xi^2)}}$$

Hieraus ist:

$$e_1-e_3 = \frac{(B-C)(A-D)}{ABCD} h^2,$$

weiterend:

$$85) \quad K = \frac{(A-B)(D-C)}{(B-C)(A-D)}, \quad 1-K = \frac{(A-C)(B-D)}{(B-C)(A-D)}$$

von h unabhängig sind u. nur die eine Integrations-
konstante D enthalten. Zugleich ist:

$$0 < K < 1, \quad \text{dann es ist:} \quad K > 0 \quad \text{u.} \quad 1-K > 0.$$

K kann aber die Grenzen 0 u. 1 selbst erreichen, es wird
nämlich $K=0$, wenn $D=C$, u. $K=1$, wenn $D=B$ ist.

Diese Fälle, welche wir bis jetzt ausgeschlossen haben, müssen
wir nun noch in Betracht ziehen. Wir bemerken, dass so lange
die drei Hauptträgheitsmomente voneinander verschieden sind
was wir auch für das folgende noch voraussetzen wollen,

wie $D=A$ werden können, da ja die Achsen ausgewählt sind, dass D stets zwischen den Grenzen B u. C liegt u. zwar entweder so, dass $A > B > D > C$ oder $A < B < D < C$ ist. Es sind daher nur die Fälle $D=C$ u. $D=B$ zu untersuchen.

Es sei zunächst $D=C$.

Es gelten allgemein die Formeln:

$$f = - \frac{\sqrt{A(D-C)}}{D(A-C)} \cdot \frac{G_1(t-t_0)}{G_2(t-t_0)}$$

$$f' = \sqrt{e_1 - e_3} \frac{\sqrt{B(D-C)}}{D(B-C)} \cdot \frac{G_1(t-t_0)}{G_2(t-t_0)}$$

$$f'' = \pm \sqrt{e_1 - e_3} \frac{\sqrt{A+B}}{(B-C)(A-C)} \cdot \frac{C}{h} \cdot \frac{G_2(t-t_0)}{G_3(t-t_0)}$$

In dem Falle $D=C$ wird nun $K=0$, also $e_2=e_3$. Dann ist aber: $\omega' = \infty$ und:

$$86) \quad \begin{aligned} G_1 u &= \frac{1}{\sqrt{\frac{3}{2}e_1}} l \sin(u \sqrt{\frac{3}{2}e_1}) \\ G_2 u &= l^{\frac{1}{4}} e_1 u^2 \cos(u \sqrt{\frac{3}{2}e_1}) \\ G_3 u &= G_2 u = l^{\frac{1}{4}} e_1 u^2 \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \text{Die Funktionen } G \\ \text{besitzen also für} \\ e_2 = e_3 \text{ resp. } \omega' = \infty \\ \text{bestimmte endliche} \\ \text{Werte.} \end{array} \right\}$$

u. es ist weiterhin:

$$87. \quad f = 0, \quad f' = 0, \quad f'' = \pm 1.$$

u. daher nach Formel (76) $P + iQ = 0$ oder:

$$P = 0 \quad Q = 0$$

d. h. die Richtung der instantanen Drehungsachse fällt in jedem Augenblick mit der Richtung der positiven z -Achse zusammen u. es ist daher die Bewegung des Körpers eine mit konstanter Winkelgeschwindigkeit um die z -Achse stattfindende Rotationsbewegung. Wie sich die α, β gestalten, kann man aus

besten aus folgender Formel entnehmen:

$$\frac{d \log(\alpha + \beta i)}{dt} = \frac{h i}{A} + \frac{y \frac{dy}{dt} + h i (\frac{1}{A} - \frac{1}{B})}{y^2 - 1}.$$

Daraus wird in unserem Falle:

$$d \log(\alpha + \beta i) = \frac{h i}{C} dt$$

$$\alpha + \beta i = \text{const.} \cdot e^{\frac{h i}{C} t}$$

Da nun $y = 0$ ist, so ist $|\alpha + \beta i| = 1$, mithin kann die Integrationskonstante auf die Form gebracht werden:

$$\text{const.} = e^{-\frac{h t_0}{C} i}$$

mithin erhalten wir:

$$88) \quad \alpha + \beta i = e^{\frac{h}{C} (t - t_0) i}$$

oder:

$$\alpha = \cos\left(\frac{h}{C} (t - t_0)\right), \quad \beta = \sin\left(\frac{h}{C} (t - t_0)\right), \quad \gamma = 0$$

Weiter ist:

$$\frac{\alpha' + \beta' i}{\alpha + \beta i} = \frac{-\gamma \gamma' + i \gamma''}{1 - \gamma^2} = \pm i, \quad \text{also:}$$

$$88) \quad \alpha' + \beta' i = \pm i e^{\frac{h}{C} (t - t_0) i} \quad \text{d.h.}$$

$$\alpha' = \mp \sin \frac{h}{C} (t - t_0), \quad \beta' = \pm \cos \frac{h}{C} (t - t_0), \quad \gamma' = 0$$

Weiter:

$$\frac{\alpha'' + \beta'' i}{\alpha + \beta i} = \frac{-\gamma \gamma'' - i \gamma'^2}{1 - \gamma^2} = 0, \quad \text{also}$$

$$88) \quad \alpha'' + \beta'' i = 0 \quad \text{oder:}$$

$$89) \quad \alpha'' = 0, \quad \beta'' = 0, \quad \gamma'' = \pm 1$$

Hieraus folgt nun aus den Gleichungen (89), dass diejenige Hauptträgheitsachse, zu welcher das Moment C gehört, im Falle dass $D = C$ ist, mit der 2. Achse zusammenfällt, so dass also die Bewegung eine gewöhnliche Rotationsbewegung um diejenige Hauptträgheitsachse ist, zu der das Moment C gehört.

Betrachten wir noch den Fall, dass β nur unendlich wenig von C verschieden ist. Dann muss, da $\frac{\beta_1}{\beta_2} \approx \frac{\beta}{\beta}$ stets endlich sind, y u. y' beiderseitig sehr klein also y'' sehr nahe gleich 1 sein. Es sind daher auch $p = q$ beiderseitig sehr klein, d. h. die augenblickliche Drehungsgeschwindigkeit wird mit der Hauptträgheitsachse C stets sehr nahe zusammenfallen. Ferner ist:

$$\frac{d \log(\alpha + \beta i)}{dt} = \frac{-y \frac{dy}{dt}}{1-y^2} + \frac{hi}{A} + \frac{hi(\frac{1}{A} - \frac{1}{\beta})}{1-y^2}, \quad \text{also:}$$

$$\log(\alpha + \beta i) = \log \sqrt{1-y^2} + \frac{hi}{A}(t-t_0) + \int_{t_0}^t \frac{hi(\frac{1}{A} - \frac{1}{\beta})}{1-y^2} dt$$

mithin sehr nahe:

$$\log(\alpha + \beta i) = \frac{hi}{A}(t-t_0) + hi \left\{ \frac{1}{A} - \frac{1}{\beta} \right\} (t-t_0)$$

oder:

$$\alpha + \beta i = e^{\frac{h(t-t_0)i}{C}}$$

Ferner ist:

$$\frac{\alpha'' + \beta'' i}{\alpha + \beta i} = \frac{-yy'' - iy'}{1-y^2} \quad \text{sehr nahe} = 0$$

Daraus schließen wir, dass $\alpha + \beta i$ stets einen endlichen Werth

hat:

$$\begin{array}{lll} \alpha'' & \text{sehr nahe} & = 0 \\ \beta'' & & = 0 \\ y'' & & = 1 \end{array}$$

Mithin können wir sagen:

Wenn die Größe β der Größe C sehr nahe kommt, so vollzieht die Achse, der das Freiheitsmoment C entspricht, während der ganzen Dauer der Bewegung nur kleine Schwankungen um die Z -Achse u. die Rotationsachse fällt in jedem Augenblicke sehr nahe mit der Z -Achse zusammen.

Wir gehen jetzt über zu dem Falle, dass die Constante $\beta = \beta$ ist. In diesem Falle wird $\ell_1 = \ell_2$ u. die reelle Periode unendlich

grafs. Nun ist allgemein, wenn $e_3 = e_1$ ist:

$$\sigma u = \frac{1}{\sqrt{\frac{3}{2}e_1}} e^{\frac{1}{4}e_1 u^2} \sin(u\sqrt{\frac{3}{2}e_1})$$

$$90, \quad \sigma_2 u = e^{\frac{1}{4}e_1 u^2} \cos(u\sqrt{\frac{3}{2}e_1})$$

$$\sigma_3 u = \sigma_1 u = e^{\frac{1}{4}e_1 u^2}$$

In unserem Falle ist nun $\beta=1$, $\gamma=2$, $\alpha=3$, also:

$$e_3 = -(e_1 + e_2) = -2e_1$$

$$\frac{3e_3}{2} = -3e_1, \quad e_1 - e_3 = -\frac{3e_3}{2}, \quad \text{und da}$$

$$e_1 - e_3 = \frac{(\beta-C)(A-\beta)}{AC} \frac{h}{\beta} \text{ ist, so haben wir, wenn}$$

wir setzen:

$$91. \quad g = \frac{h}{\beta} \sqrt{\frac{(\beta-C)(A-\beta)}{AC}}$$

$$\sqrt{\frac{3}{2}e_1} = ig$$

Es daher:

$$\sigma u = e^{-\frac{1}{6}g^2 u^2} \frac{e^{gu} - e^{-gu}}{2g}$$

$$92, \quad \sigma_2 u = e^{-\frac{1}{6}g^2 u^2} \frac{e^{gu} + e^{-gu}}{2}$$

$$\sigma_1 u = \sigma_3 u = e^{-\frac{1}{6}g^2 u^2}$$

Nun war:

$$w = \frac{1}{\sqrt{e_1 - e_3}} \int_{\xi}^1 \frac{d\xi}{\sqrt{(1-\xi^2)(1-(1-\kappa)\xi^2)}}$$

und es:

$$\xi = \sqrt{\frac{A(\beta-C)}{\beta(A-C)}}, \quad \text{folglich für } \kappa=1:$$

$$w = \frac{1}{g} \int_{\xi}^1 \frac{d\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}, \quad \text{oder}$$

$$93, \quad \xi = \cos(gw)$$

Benutzend wir diese Gleichungen (92)(93), so gehen die Werte der y über in die folgenden:

$$y = -\cos(gw) \cdot \frac{2}{e^{g(t-t_0)} + e^{-g(t-t_0)}}$$

$$94) \quad y' = \frac{e^{g(t-t_0)} - e^{-g(t-t_0)}}{e^{g(t-t_0)} + e^{-g(t-t_0)}}$$

$$y'' = \pm \sin(gw) \frac{2}{e^{g(t-t_0)} + e^{-g(t-t_0)}}$$

Hieraus folgt:

$$\left. \begin{array}{l} y = 0 \\ y' = +1 \\ y'' = 0 \end{array} \right\} \text{ für } t = +\infty \quad \left. \begin{array}{l} y = 0 \\ y' = -1 \\ y'' = 0 \end{array} \right\} \text{ für } t = -\infty$$

Mathematisch durchläuft y' in dem Zeitraum $t = -\infty$ bis $t = +\infty$ alle Werte von -1 bis $+1$, so dass also keine Stabilität stattfindet.

Weiter ergibt sich:

$$95) \quad \alpha + \beta i = \frac{e^{g(t-t_0-wi)} - e^{-g(t-t_0-wi)}}{e^{g(t-t_0)} + e^{-g(t-t_0)}} e^{\{\mu + \nu(t-t_0)\}i}$$

$$\alpha' + \beta' i = \frac{2}{e^{g(t-t_0)} + e^{-g(t-t_0)}} e^{\{\mu + \nu(t-t_0)\}i}$$

$$\alpha'' + \beta'' i = \frac{e^{g(t-t_0-wi)} + e^{-g(t-t_0-wi)}}{e^{g(t-t_0)} + e^{-g(t-t_0)}} e^{\{\mu + \nu(t-t_0)\}i}$$

$$96) \quad P + Qi = \frac{g}{i} \frac{2}{e^{g(t-t_0)} + e^{-g(t-t_0)}} e^{\{\mu + \nu(t-t_0)\}i}$$

$$R = \frac{h}{B}$$

Hierin ist überall:

$$\nu = \frac{h}{A} + Tg(gw)$$

Es geht hieraus hervor, dass mit wachsendem t P u. Q sich der Grenze 0 nähern, während R konstant bleibt. Ferner nähern sich für $t = \pm \infty$ α' u. β' der Grenze 0 , während y' für

$t = +\infty$ gleich $+1$, für $t = -\infty$ gleich -1 war. Daraus folgt:

- 1, Die instantane Drehungsachse neigt sich mit wachsen der Zeit immer mehr der z -Achse.
- 2, Die Trägheitsachse, zu welcher das mittlere Trägheitsmoment gehört, neigt sich ebenfalls mit der Zeit mehr u. mehr der z -Achse.

Folglich fällt an der Grenze der Zeit die instantane Drehungsachse mit der Achse des mittleren Trägheitsmomentes zusammen.

Es findet also in diesem Falle keine Rotation um eine feste Achse statt, wie im Falle $D=C$, weil jetzt P u. Q veränderliche Größen sind.

Hierin wir gleich von vorn herein die Frage aufgeworfen, ob auch die mittlere Trägheitsachse eine beständige Rotationsachse sein könne, so würden wir gesehen haben, dass dieser Fall wirklich eintritt, wenn für jeden Werth von t :

$$y = 0 \quad y' = \pm 1 \quad y'' = 0$$

ist. Dann erhalten wir aus unseren Differentialgleichungen

$$\alpha + \beta i = e^{\frac{hi}{\sigma}(t-t_0)}$$

$$\alpha' + \beta' i = 0$$

$$\alpha'' + \beta'' i = -i e^{\frac{hi}{\sigma}(t-t_0)}$$

$$P + Qi = 0$$

$$R = \text{const}$$

u. es fiel dann in der That die mittlere Hauptträgheitsachse mit der z -Achse u. ebenso die instantane Drehungsachse mit der z -Achse zusammen, so dass also die Achse des mittleren Träg-

heitsmomentes eine beständige Rotationsartse wäre. Der Fall $y=0$, $y'=\pm 1$, $y''=0$ entspricht nach Formel (54) dem Falle $D=B$, er müsste also in dem oben besprochenen Falle enthalten sein. Andererseits aber fanden wir vorher, dass die mittlere Hauptträgheitsachse keine beständige Rotationsartse wäre. Wie kleist sich nun dieser Widerspruch auf? Es liegt die-
 er an dem Werthe der Constanten t_0 . Wenn nämlich D näher u. weiter an B herannähert, so wird auch die Größe ω mehr u. mehr zunehmen, also kann auch t_0 einen immer größeren Werth erhalten. Geht man zur Grenze $D=B$ über, so muss t_0 je den möglichen Werth erhalten können u. kann so groß werden als man will, also auch gleich $\pm \infty$ werden. Dadurch können wir auf jenem Fall. Die Bedeutung von t_0 ist folgende. Für $t=t_0$ wird im Falle $D=B$ noch immer $y'=0$ d.h. t_0 ist einer jenen Momente, in denen der Punkt S von der negativen zur positiven Seite der $x'z'$ -Ebene übergeht. Wenn nun dieser Moment ... in unserem Falle gibt es nur einen solchen, da y' nicht reell periodisch ist ... sehr weit zurückliegt, so ist $t_0 = -\infty$ u. es ist für jeden Werth von t :

$$\begin{aligned} y &= 0 & y' &= 0 & y'' &= 0 \\ x + \beta i &= e^{+gwi} e^{(1+vt)i} e^{t_0 i} = e^{v(t-d)i} & t_0 &= -t_0 v \bmod 2. \\ x' + \beta' i &= 0 \\ x'' + \beta'' i &= -i e^{v(t-d)i} \\ P + iQ &= 0 \end{aligned}$$

Liegt aber dieser Moment in ferner Zukunft, so ist $t_0 = +\infty$ u. es ist für jeden Werth von t :

$$y = 0, \quad y' = -1, \quad y'' = 0.$$

$$\alpha + \beta i = e^{v(t-d')i}$$

$$\alpha' + \beta' i = 0$$

$$\alpha'' + \beta'' i = i e^{v(t-d')i}$$

in beiden Fällen ist tatsächlich die Achse des mittleren Freigheitsmomentes eine freie Rotationsachse, so dass also dieser Fall wirklich in den für den Fall $D = B$ aufgestellten Formeln enthalten ist.

Die besonderen Fälle, dass zwei der Freigheitsmomente einander gleich sind, sind sehr einfach zu behandeln. Man geht dabei am einfachsten auf die Differentialgleichungen zu, die sich diese dann leicht integrieren lassen. Wir nehmen z. B. $A > B > C$ an und setzen $A = B$. Dann wird:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{B-C}{BC} h y y'' = \lambda y y''$$

$$\frac{dy'}{dt} = \frac{C-A}{AC} h y'' y = -\lambda y'' y$$

$$\frac{dy''}{dt} = \frac{A-B}{AB} h y y' = 0$$

folglich:

$$y'' = \text{const} = C$$

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = -\lambda^2 C^2 y$$

$$\frac{d^2 y'}{dt^2} = -\lambda^2 C^2 y'$$

mithin:

$$y = C_1 \cos(\lambda C t)$$

$$y' = C_2 \sin(\lambda C t)$$

Man erhält auf diese Weise Formeln, in denen nur trigonometrische Funktionen vorkommen.

Wir wollen jetzt noch einen Fall der Rotation, welcher sich vollständig durch elliptische Funktionen erledigen lässt, auf-

stellen. Wir führen statt der 9 Größen $\alpha, \beta, \dots, \gamma$ andere ein, nämlich nach Euler drei Größen λ, μ, ν , durch welche sich je-ne 9 Coefficienten in durchaus symmetrischer Weise ausdrücken lassen. Noch besser ist es nach Weierstrass die Quotienten $\frac{\lambda}{\xi}, \frac{\mu}{\xi}, \frac{\nu}{\xi}$ einzuführen, wobei über diesen vier Größen die Bedingungsgleichung:

$$\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 + \xi^2 = 1$$

vorauschreiben. Es ist:

$$(\alpha + \beta i)^2 + (\alpha' + \beta' i)^2 + (\alpha'' + \beta'' i)^2 = 0$$

n. Diese Gleichung kann man in allgemeiner Weise dadurch erfüllen, dass man setzt:

$$\begin{aligned} \alpha + \beta i &= g^2 - h^2 \\ 96) \quad \alpha' + \beta' i &= -(g^2 + h^2)i \\ \alpha'' + \beta'' i &= 2gh \end{aligned}$$

Umgekehrt sieht man, dass man stets zwei Größen g, h in dieser Weise bestimmen kann, denn es ist:

$$\begin{aligned} 2g^2 &= (\alpha + \beta i) + i(\alpha' + \beta' i) \\ 2h^2 &= (\alpha + \beta i) - i(\alpha' + \beta' i) \end{aligned}$$

Wird hierbei das Vorzeichen von g willkürlich gewählt, so ist das von h durch die dritte Gleichung (96) bestimmt. Wir setzen nun unter λ, μ, ν, ξ reelle Größen verstanden:

$$97) \quad g = \lambda + \mu i, \quad h = \nu + \xi i$$

Dann ist:

$$\begin{aligned} 98) \quad \alpha &= \xi^2 + \lambda^2 - \mu^2 - \nu^2, & \alpha' &= 2(\lambda\mu + \nu\xi) & \alpha'' &= 2(\nu\lambda - \mu\xi) \\ \beta &= 2(\lambda\mu - \nu\xi) & \beta' &= \xi^2 - \lambda^2 + \mu^2 - \nu^2 & \beta'' &= 2(\mu\nu + \lambda\xi) \end{aligned}$$

Da nun $\alpha^2 + \alpha'^2 + \alpha''^2 = 1$ ist, so haben wir:

$$99) \quad \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 + \xi^2 = 1$$

Ferner folgt aus (8) mit Rücksicht auf

$$98) \quad \gamma = 2(\nu\lambda + \mu\varrho) \quad , \quad \gamma' = 2(\mu\nu - \lambda\varrho) \quad , \quad \gamma'' = \varrho^2 - \lambda^2 - \mu^2 + \nu^2.$$

Durch die Gleichungen werden also die Größen α, β, γ'' durch die vier Größen $\lambda, \mu, \nu, \varrho$ ausgedrückt.

Zwischen den x, y, z u. x', y', z' bestehen dann nach (1) folgende Transformationsformeln:

$$\begin{aligned} x &= (2\varrho^2 - 1)x' + 2\lambda(\lambda x' + \mu y' + \nu z') + 2\varrho(\nu y' - \mu z') \\ 100) \quad y &= (2\varrho^2 - 1)x' + 2\mu(\lambda x' + \mu y' + \nu z') + 2\varrho(\lambda z' - \nu x') \\ z &= (2\varrho^2 - 1)x' + 2\nu(\lambda x' + \mu y' + \nu z') + 2\varrho(\mu x' - \lambda y') \end{aligned}$$

Setzt man:

$$x' = \lambda\alpha$$

$$y' = \mu\alpha$$

$$z' = \nu\alpha$$

$$x = \lambda\alpha$$

$$y = \mu\alpha$$

$$z = \nu\alpha$$

d. h. der Punkt P , dessen Coordinaten λ, μ, ν sind, hat in Bezug auf beide Achsensysteme dieselben Coordinaten, dasselbe gilt von allen Punkten der Geraden OP . Es bestimmen daher die Größen λ, μ, ν eine gewisse Gerade OP . Dreht man das eine Achsensystem um diese Gerade, so kann man dasselbe in das andere System überführen. Ferner besteht ein gewisser Zusammenhang zwischen ϱ u. dem Winkel, um welchen gedreht werden muss, worauf wir aber nicht weiter eingehen.

Weiter ergibt sich:

$$\begin{aligned} 101) \quad 1 + \alpha + \beta' + \gamma'' &= 4\varrho^2 \\ 1 + \alpha - \beta' - \gamma'' &= 4\lambda^2 \\ 1 - \alpha + \beta' - \gamma'' &= 4\mu^2 \\ 1 - \alpha - \beta' + \gamma'' &= 4\nu^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 102) \quad \gamma' - \beta'' &= 4\lambda\varrho \quad , \quad \alpha'' - \gamma = -4\mu\varrho \quad , \quad \beta - \alpha' = -4\nu\varrho \\ \gamma' + \beta'' &= 4\mu\nu \quad , \quad \alpha'' + \gamma = 4\nu\lambda \quad , \quad \beta + \alpha' = 4\lambda\mu \end{aligned}$$

Daraus sieht man, wenn man für irgend eine der Größen $\lambda, \mu, \nu, \varrho$ das Zeichen festgestellt hat, — erhält man damit auch das Zeichen der übrigen Größen. Nun war nach 17.

$$p dt = \alpha "d\alpha' + \beta "d\beta' + \gamma "d\gamma'$$

Hieraus folgt durch einfache Rechnung:

$$\begin{aligned} p dt &= 2 \{ \lambda d\varrho - \varrho d\lambda + \nu d\mu - \mu d\nu \} & \text{analog:} \\ 103, \quad q dt &= 2 \{ \mu d\varrho - \varrho d\mu + \lambda d\nu - \nu d\lambda \} \\ r dt &= 2 \{ \nu d\varrho - \varrho d\nu + \mu d\lambda - \lambda d\mu \} \\ 0 &= \varrho d\varrho + \mu d\mu + \nu d\nu + \lambda d\lambda. \end{aligned}$$

hieraus:

$$\begin{aligned} 2 \frac{d\lambda}{dt} &= -p\varrho - q\nu + r\mu \\ 104, \quad 2 \frac{d\mu}{dt} &= -q\varrho - r\lambda + p\nu \\ 2 \frac{d\nu}{dt} &= -r\varrho - p\mu + q\lambda \\ 2 \frac{d\varrho}{dt} &= \lambda p + \mu q + \nu r. \end{aligned}$$

Fügen wir zu diesen vier Gleichungen noch die drei Gleichungen (33) so haben wir 7 Differentialgleichungen zur Bestimmung der 7 Größen $\lambda, \mu, \nu, \varrho, p, q, r$.

Wir machen nun die Annahme, dass der Körper sich allein unter der Einwirkung der Schwerkraft um einen festen Punkt bewege, der nicht der Schwerpunkt ist:

Dann ist:

$$\begin{aligned} 105, \quad X &= 0 \quad Y = 0 \quad Z = 2g & \text{also:} \\ X' &= 2g\gamma, \quad Y' = 2g\gamma', \quad Z' = 2g\gamma''. \end{aligned}$$

und:

$$\sum m (y'z' - z'y') = 2g \sum m (y''_1 - z'_1) = 2g \{ \gamma'' \sum m y' - \gamma' \sum m z' \}$$

Berechnen wir ferner mit x_0, y_0, z_0 die Koordinaten des Schwerpunktes, bezogen auf das bewegte System, mit M die Masse u. mit K das Gewicht des Körpers, so dass also $K = M \cdot g$ ist, so haben wir zu (104) noch die drei Gleichungen:

$$\begin{aligned} 105) \quad A \frac{dp}{dt} &= (B-C)qr + K(y_0 y'' - z_0 y') \\ B \frac{dq}{dt} &= (C-A)rp + K(z_0 y' - x_0 y'') \\ C \frac{dr}{dt} &= (A-B)pq + K(x_0 y' - y_0 y'') \end{aligned}$$

Aus den Gleichungen (104) u. (106) sind nun die Größen $\lambda, \mu, \nu, \varphi, p, q, r$ als Funktionen der Zeit zu berechnen.

Dazu machen wir über die weitere Annahme, dass die beiden Hauptträgheitsmomente A u. B unseres Körpers einander gleich seien - dass der Schwerpunkt in der dritten Trägheitsachse liege. Dann ist $x_0 = y_0 = 0$ u. es vereinfachen sich die vorstehenden Gleichungen zu folgenden:

$$\begin{aligned} 106) \quad A \frac{dp}{dt} &= (A-C)qr - 2H(\nu\mu - \varphi\lambda) \\ A \frac{dq}{dt} &= -(A-C)rp + 2H(\nu\lambda + \varphi\mu) \\ \frac{dr}{dt} &= 0 \end{aligned}$$

worin $Kz_0 = H$ gesetzt ist. Das System der Gleichungen (104), (107) können wir jetzt zu folgenden vier Gleichungen zusammenfassen:

$$\begin{aligned} A \frac{d(p+qi)}{dt} &= -i(A-C)(p+qi) + 2Hi(\lambda+\mu i)(\nu-\varphi i) \\ r &= \text{const} \end{aligned}$$

$$108) \quad \frac{d(\lambda+\mu i)}{dt} = \frac{i}{2}(p+qi)(\nu+\varphi i) - \frac{ri}{2}(\lambda+\mu i)$$

$$\frac{d(\nu+\varphi i)}{dt} = \frac{i}{2}(p-qi)(\lambda+\mu i) + \frac{ri}{2}(\nu+\varphi i)$$

Hieraus folgt unmittelbar:

$$\frac{d \log (\lambda + \mu i)}{dt} = -\frac{1}{2} r i + \frac{1}{2} i \frac{(p+qi)(v+qi)(\lambda - \mu i)}{\lambda^2 + \mu^2}$$

$$\frac{d \log (v+qi)}{dt} = \frac{1}{2} r i + \frac{1}{2} i \frac{(p-qi)(v-qi)(\lambda + \mu i)}{v^2 + q^2}$$

$$\lambda \frac{d \log (p+qi)}{dt} = i (\lambda - \mu i) r + 2 \operatorname{Re} i \frac{(p-qi)(v-qi)(\lambda + \mu i)}{p^2 + q^2}$$

Setzt man jetzt:

$$109) \quad (\lambda + \mu i)(v - qi)(p - qi) = \xi + i \xi_1,$$

so gehen vorstehende Gleichungen über in:

$$\frac{d \log (\lambda + \mu i)}{dt} = -\frac{1}{2} r i + \frac{1}{2} i \frac{\xi - i \xi_1}{\lambda^2 + \mu^2}$$

$$110) \quad \frac{d \log (v+qi)}{dt} = \frac{1}{2} r i + \frac{1}{2} i \frac{\xi + i \xi_1}{v^2 + q^2}$$

$$\lambda \frac{d \log (p+qi)}{dt} = -i (\lambda - \mu i) r + 2 \operatorname{Re} i \frac{\xi + i \xi_1}{p^2 + q^2}$$

Setzen wir in diesen Gleichungen $-i$ statt i u. addieren die entsprechenden Größen, so wird:

$$\frac{d \log (\lambda^2 + \mu^2)}{dt} = \frac{\xi_1}{\lambda^2 + \mu^2}$$

$$\frac{d \log (v^2 + q^2)}{dt} = \frac{-\xi_1}{v^2 + q^2}$$

$$\frac{d \log (p^2 + q^2)}{dt} = -\frac{4 \operatorname{Re}}{\lambda} \frac{\xi_1}{p^2 + q^2}$$

Bei nun aber:

$$d \log (\lambda^2 + \mu^2) = \frac{1}{\lambda^2 + \mu^2} d(\lambda^2 + \mu^2)$$

ist, so erhalten wir hiervon sehr einfache:

$$d(\lambda^2 + \mu^2) = \xi_1 dt$$

$$111) \quad d(v^2 + q^2) = -\xi_1 dt$$

$$d(p^2 + q^2) = -\frac{4 \operatorname{Re}}{\lambda} \xi_1 dt.$$

Zwischen ξ u. ξ_1 besteht keine einfache Relation. Es ist näm-

hier nach (109):

$$d \log(\lambda + \mu i) + d \log(v - \vartheta i) + d \log(p - q i) = d \log(\xi + \xi_1 i)$$

folglich wegen (110):

$$\frac{d}{dt} \log(\xi + \xi_1 i) = -\frac{C}{A} \pi i + \frac{i}{2} (\xi - \xi_1 i) \left\{ \frac{1}{\lambda^2 + \mu^2} - \frac{1}{v^2 + \vartheta^2} - \frac{4H}{A(p^2 + q^2)} \right\}$$

oder:

$$\frac{d}{dt} (\xi + i \xi_1) = -\frac{C}{A} \pi i (\xi + i \xi_1) + \frac{i}{2} (\xi^2 + \xi_1^2) \left\{ \frac{1}{\lambda^2 + \mu^2} - \frac{1}{v^2 + \vartheta^2} - \frac{4H}{A(p^2 + q^2)} \right\}$$

Setzt man hierin die reellen Theile beider Seiten einander gleich, so wird:

$$(112) \quad \frac{d\xi}{dt} = \frac{C}{A} \pi \xi,$$

es gelten daher die Gleichungen (111) in folgende über:

$$d(\lambda^2 + \mu^2) = \frac{d}{C\pi} d\xi$$

$$d(v^2 + \vartheta^2) = -\frac{d}{C\pi} d\xi$$

$$d(p^2 + q^2) = -\frac{4H}{C\pi} d\xi$$

aus denen durch Integration folgt:

$$\lambda^2 + \mu^2 = \frac{A}{C\pi} (\xi - c_1)$$

$$(113) \quad v^2 + \vartheta^2 = -\frac{A}{C\pi} (\xi - c_2)$$

$$p^2 + q^2 = -\frac{4H}{C\pi} (\xi - c_3)$$

Darin bedeuten c_1, c_2, c_3, π willkürliche Integrationskonstanten. Nun ist aber nach (109):

$$\xi^2 + \xi_1^2 = (\lambda^2 + \mu^2)(v^2 + \vartheta^2)(p^2 + q^2)$$

folglich mit Rücksicht auf (112) u. (113)

$$(114) \quad \left(\frac{d\xi}{dt} \right)^2 = -\frac{C^2 \pi^2}{A^2} \xi^2 + \frac{4H}{C} (\xi - c_1)(\xi - c_2)(\xi - c_3) = R(\xi)$$

durch diese Gleichung ist nun ξ als elliptische Function von t bestimmt. Dabei ist zu bemerken, dass infolge der Gleichung (99) zwischen den Integrationskonstanten eine Relation besteht.

Ersetzt man in:

$$\frac{dt}{dr} (c_2 - c_1) = 1$$

oder:

$$r = \frac{dt (c_2 - c_1)}{c}$$

Setzt man in:

$$115) \quad R(\xi) = -(c_2 - c_1) \xi^2 + \frac{4\sqrt{c}}{c(c_2 - c_1)} (\xi - c_1)(\xi - c_2)(\xi - c_3)$$

Bringen wir jetzt noch mit Hilfe derselben abgeleiteten Relationen die Formeln (110) auf ihre definitive Gestalt, so haben wir zur Bestimmung der Größen λ, u, v, p, q, r folgendes Gleichungssystem:

$$116) \quad \begin{aligned} a) \quad \frac{d \log(\lambda + u i)}{dt} &= \frac{c - t}{2c} (c_2 - c_1) i + \frac{1}{2} \frac{\frac{d\xi}{dt} + c_1 (c_2 - c_1) i}{\xi - c_1} \\ b) \quad \frac{d \log(v + q i)}{dt} &= -\frac{c - t}{2c} (c_2 - c_1) i + \frac{1}{2} \frac{\frac{d\xi}{dt} - c_2 (c_2 - c_1) i}{\xi - c_2} \\ c) \quad \frac{d \log(p + q i)}{dt} &= \frac{c - t}{c} (c_2 - c_1) i + \frac{1}{2} \frac{\frac{d\xi}{dt} - c_3 (c_2 - c_1) i}{\xi - c_3} \\ d) \quad r &= \frac{dt (c_2 - c_1)}{c} \\ e) \quad \left(\frac{d\xi}{dt} \right)^2 &= R(\xi) \end{aligned}$$

Aus der letzten Gleichung ergibt sich ξ als elliptische Funktion von t , also:

$$\xi = \varphi(t)$$

Da nun ferner:

$$R(c_1) = -(c_2 - c_1)^2 c_1^2$$

ist, so kann man drei Argumente t_1, t_2, t_3 so bestimmen, dass:

$$117) \quad \begin{aligned} \varphi(t_1) &= c_1, & \varphi'(t_1) &= c_1 (c_2 - c_1) i \\ \varphi(t_2) &= c_2, & \varphi'(t_2) &= -c_2 (c_2 - c_1) i \\ \varphi(t_3) &= c_3, & \varphi'(t_3) &= -c_3 (c_2 - c_1) i \end{aligned}$$

wird u. es ist dann:

$$\frac{d \log(A+xi)}{dt} = \frac{C-t}{2C} (c_2 - c_1) i + \frac{1}{2} \frac{\varphi'(t) + \varphi'(t_1)}{\varphi(t) - \varphi(t_1)}$$

118) $\frac{d \log(v+gi)}{dt} = -\frac{C-t}{2C} (c_2 - c_1) i + \frac{1}{2} \frac{\varphi'(t) + \varphi'(t_2)}{\varphi(t) - \varphi(t_2)}$

$$\frac{d \log(p+qi)}{dt} = \frac{C-2t}{C} (c_2 - c_1) i + \frac{1}{2} \frac{\varphi'(t) + \varphi'(t_3)}{\varphi(t) - \varphi(t_3)}$$

Wir legen nun die 2' Ableitung so, dass der Schwerpunkt in die positive 2' Ableitung fällt; dann ist z_0 positiv, also auch H positiv u. reell. Ferner müssen wir für das folgende die beiden Fälle $r > 0$ u. $r < 0$ unterscheiden, da dies für die Bestimmung der Grenzen t, t_2, t_3 wesentlich ist. Es sei zunächst:

119) $r > 0$.

Dann ist nach (116d) $c_2 > c_1$, ferner nach (113) $\xi > c_1$ u. $\xi < c_2$ also:

$$c_2 > \xi > c_1$$

Legen wir nun dem ξ einen Werth ξ_0 bei, den es für $t = t_0$ wirklich annimmt, so ist $R(\xi_0) > 0$ u. es liegt ξ_0 zwischen c_1 u. c_2 .

Nun ist daher:

$$R(c_1) < 0 \quad R(c_2) < 0$$

woraus folgt, dass die Gleichung $R(\xi) = 0$ eine reelle Wurzel zwischen c_1 u. ξ_0 u. eine andere zwischen ξ_0 u. c_2 besitzt. Da aber ξ_0 zwischen c_1 u. c_2 liegt, so sind diese beiden Wurzeln getrennt u. es besitzt somit die Gleichung $R(\xi) = 0$ zwei, mithin auch drei reelle Wurzeln u. zwar liegt die dritte, da $R(+\infty) > 0$ ist, zwischen c_2 u. $+\infty$ oder zwischen c_1 u. $+\infty$, je nachdem $c_1 > c_2$ oder $c_1 < c_2$ ist. Bezeichnen wir also die beiden zwischen c_1 u. c_2 gelegenen Wurzeln mit g_2 u. g_3 , wo $g_2 > g_3$ sei, dann ist:

120) $c_1 < g_3 < g_2 < c_2$ } je nachdem $c_1 > c_2$ ist.
 $c_1 < c_2$

Berechnen wir die dritte Wurzel mit g_1 , so ist also:

$$121. \quad \begin{cases} g_1 > g_2 > g_3 & \text{und:} \\ R(\xi) = \frac{4H}{A(c_2 - c_1)} \end{cases}$$

Nun könnte ξ an n. für sich in jedem Intervalle liegen, in welchem $R(\xi)$ positiv ist, also zwischen $+\infty$ u. g_1 , oder zwischen g_1 u. g_3 . Es würde aber auch ξ jedesmal das ganze Intervall durchlaufen müssen, da $\frac{d\xi}{dt}$ stets dasselbe Zeichen hat. Wenn also ξ einmal größer als g_1 wäre, so würde es auch jeden beliebig großen Wert annehmen können, was absurd ist. Hithin muß ξ zwischen g_2 u. g_3 liegen. Wir erhalten daher eine reelle Substitution, wenn wir setzen:

$$122, \quad s = \frac{1}{4} \frac{R'(g_1)}{\xi - g_3} + \frac{1}{24} R''(g_3)$$

Hiermit entsprechen den Größen $g_1, g_2, g_3, +\infty$ die Größen l_1, l_2, l_3, ∞ in einer gewissen Reihenfolge, da $s = \infty$ ist für $\xi = g_3$, so müßen den Werten:

$$123, \quad \begin{array}{ccccc} \xi = \infty & g_1 & g_2 & g_3 & \text{resp. die Werte:} \\ s = l_3 & l_2 & l_1 & \infty \end{array}$$

entsprechen. Dann ist:

$$s - l_3 = \frac{1}{4} \frac{R'(g_1)}{\xi - g_3}$$

woraus folgt:

$$l_1 - l_3 = \frac{H(g_1 - g_3)}{A(c_2 - c_1)}$$

$$124, \quad l_2 - l_3 = \frac{H(g_2 - g_3)}{A(c_2 - c_1)}$$

$$l_1 - l_2 = \frac{H(g_1 - g_2)}{A(c_2 - c_1)}$$

Da nun $H > 0$, $c_2 - c_1 > 0$ und $g_1 > g_2 > g_3$, so ist:

$$l_1 > l_2 > l_3$$

wie es bei unserer Festsetzung für reelle Größen l_1, l_2, l_3 ja der

Fall sein muss. Es sind daher in (123) die entsprechenden Werthe richtig angegeben. Wir erhalten also:

$$p(t-t_0) - l_3 = \frac{1}{4} \frac{R'(g_2)}{q(t)-g_2}$$

worin t_0 eine reelle Constante bedeutet, welche einen der Momente bezeichnet, in denen $q(t)$ seinen kleinsten Werth g_2 annimmt. Diese Formel benutzen wir jetzt, um die Constanten t, t_2, t_3 zu bestimmen. Dieselbe lässt sich in der Form schreiben:

$$125, \quad p(t-t_0) - l_3 = \frac{t(c_2 - c_1)(c_1 - c_3)(c_2 - c_3)}{4(q(t) - g_2)}$$

Da $q(t)$ für alle reellen Werthe von t zwischen g_2 u. g_3 liegt, so kann der Werth t' von t , für welchen $q(t') = \infty$ wird, nicht reell sein u. zwar ist derselbe, da $p(t'-t_0) = l_3$ ist, gleich: $t' = t_0 + w'$. Hienach erhalten wir aus den Formeln (118) mit Rücksicht auf die allgemeine Gleichung (28) pag. 23, wenn wir darin $A=0$, $v=t_1, t_2, t_3$, $u=t'$ setzen, durch Integration die Gleichungen:

$$126, \quad \begin{aligned} A + \mu i &= C_1 \frac{\sigma(t-t_1)}{\sigma(t-t')} e^{L_1(t-t_0)i} \\ v + \rho i &= C_2 \frac{\sigma(t-t_2)}{\sigma(t-t')} e^{L_2(t-t_0)i} \\ p + q i &= C_3 \frac{\sigma(t-t_3)}{\sigma(t-t')} e^{L_3(t-t_0)i} \end{aligned}$$

worin zur Abkürzung gesetzt ist:

$$127, \quad \begin{aligned} L_1 &= \frac{C-1}{2C} (c_2 - c_1) + \frac{\sigma'(t_1 - t')}{i\sigma(t_1 - t')} \\ L_2 &= -\frac{C-1}{2C} (c_2 - c_1) + \frac{\sigma'(t_2 - t')}{i\sigma(t_2 - t')} \\ L_3 &= -\frac{C-2}{C} (c_2 - c_1) + \frac{\sigma'(t_3 - t')}{i\sigma(t_3 - t')} \end{aligned}$$

Berechnen wir mit \bar{t}_i die zu t_i , mit \bar{L}_i die zu L_i entsprechende Größe, so ist $\bar{L}_0 - \omega'$ zu ω' conjugiert ist, wegen (109)

$$\bar{\xi} - \xi, i = \left(\frac{\bar{\omega}(t-\bar{t}_1)\bar{\omega}(t-t_2)\bar{\omega}(t-t_3)}{\bar{\omega}(t-t_0+\omega')\bar{\omega}(t-t_0+\omega')\bar{\omega}(t-t_0+\omega')} \right) \frac{(L_2+L_3-\bar{L}_1)(t-t_0)i}{L}$$

Dieser Ausdruck ist keine doppeltperiodische Funktion, da $\bar{\xi} \neq \xi$, solche sind. Es müssen daher die Null- u. Unendlichkeitsstellen der Funktion der Bedingung unterliegen:

$$\sum (a_v - b_v) = \bar{t}_1 + t_2 + t_3 - 3t_0 + 3\omega' = 2v\omega + 2v'\omega'$$

wobei v u. v' ganze Zahlen sind. Aber diese Null- u. Unendlichkeitsstellen kann man derart um Perioden verschieben, dass $\sum (a_v - b_v) = 0$ wird, sodaß dann der Exponentialfaktor gleich 1. Dann kann wir uns also von vornherein \bar{t}_1, t_2, t_3 so gewählt, dass $\bar{t}_1 + t_2 + t_3 - 3t_0 - \omega' = 0$ ist, so ist zugleich:

$$-\bar{L}_1 + L_2 + L_3 = 0$$

Wir brauchen daher nur L_1 u. L_2 zu bestimmen, um auch L_3 zu kennen. Da nun nach unseren Bestimmungen $e_1 > e_2 > e_3$, $c_1 < g_1 < g_2 < c_2$ ist, so zeigt die Gleichung (125), dass $p(t_1 - t_0) - e_1$ eine negativ reelle Größe ist, während aus der Gleichung:

$$p'(t-t_0) = - \frac{t(c_1-c_2)(c_1-c_3)(c_2-c_3)}{\mathcal{H}(\varphi(t)-g_1)^2} \varphi'(t)$$

hervorgeht, dass $p'(t_1 - t_0)$ eine negative rein imaginäre Größe ist. mithin liegt $t_1 - t_0$ zwischen 0 u. ω' oder es ist:

$$128) \quad t_1 = t_0 + w, i \quad , \quad \text{wo } 0 < w < \frac{\omega'}{i} \text{ ist.}$$

Dieses w ist daher bestimmt durch die Gleichungen:

$$p(w, i) = e_3 - \frac{t(c_1-c_2)(c_1-c_3)(c_2-c_3)}{\mathcal{H}(g_3-c_1)^2} ;$$

$$p'(w, i) = -i \frac{t(c_1-c_2)^2(c_1-c_3)(c_2-c_3)c_1}{\mathcal{H}(g_3-c_1)^2}$$

Da ferner $\varphi(t_2) = c_2$, $\varphi'(t_2) = -c_2(c_2 - c_1)c$ ist, so ist $p(t_2 - t_0) - l_3$ positiv reell $\therefore p'(t_2 - t_0)$ positiv u. rein imaginär, folglich liegt $t_2 - t_0$ zwischen ω u. $\omega + \omega'$ oder es ist:

129, $t_2 = t_0 + \omega + w_2 i$, wo $0 < w_2 < \frac{\omega'}{i}$ ist und w_2 durch die Gleichungen bestimmt wird:

$$p(w_2 i) = c_1 - \frac{H(c_2 - g_1)(c_1 - c_2)}{t(c_1 - c_2)(c_2 - c_3) - H(c_1 - g_1)} = c_1 \frac{(c_2 - g_1)(c_1 - c_2)}{c_2 - g_2}$$

$$p'(w_2 i) = -i \frac{t(c_2 - c_1)^2(c_1 - c_2)(c_2 - c_3)c_2}{H(c_2 - g_2)^2}$$

Wenn sollte $\bar{t}_1 + t_2 + t_3 - 3t_0 - \omega' = 0$ sein, mithin wird:

$$130, t_3 = t_0 + (w_1 - w_2)i - (\omega - \omega')$$

Hierzu gehen nun die Formeln (126) in folgende über:

$$131, \begin{aligned} 1 + \mu i &= \bar{C}_1 \frac{\sigma_1(t - t_0 - w_1 i)}{\sigma_3(t - t_0)} e^{l_1(t - t_0)i} \\ \nu + \rho i &= \bar{C}_2 \frac{\sigma_1(t - t_0 - w_2 i)}{\sigma_3(t - t_0)} e^{l_2(t - t_0)i} \\ \rho + q i &= \bar{C}_3 \frac{\sigma_2(t - t_0 - (w_1 - w_2)i)}{\sigma_3(t - t_0)} e^{l_3(t - t_0)i} \end{aligned}$$

Dann ist:

$$132, \begin{aligned} l_1 &= \frac{C - t}{2C} (c_2 - c_1) + \frac{\sigma_3'(w_1 i)}{i \sigma_3(w_1 i)} \\ l_2 &= -\frac{C - t}{2C} (c_2 - c_1) + \frac{\sigma_2'(w_2 i)}{i \sigma_2(w_2 i)} \\ l_3 &= \frac{C - 2t}{C} (c_2 - c_1) + \frac{\sigma_1'((w_1 - w_2)i)}{i \sigma_1((w_1 - w_2)i)} \end{aligned}$$

und:

$$\begin{aligned} L_1 &= l_1 + \eta' i \\ L_2 &= l_2 + \eta' i - \eta i \\ L_3 &= l_3 + \eta i \end{aligned}$$

Da L_1 reell ist, so ist $\bar{L}_1 = L_1$, mithin wird wegen

$$L_2 + L_3 - L_1 = 0 :$$

$$l_2 + l_3 - l_1 = 0$$

Diese Formel gilt unmittelbar wegen (116 d) :

$$133) \quad r = \frac{\bar{\sigma}_2'(w_2 i)}{i \bar{\sigma}_2(w_2 i)} + \frac{\bar{\sigma}_3'(w_1 i)}{i \bar{\sigma}_3(w_1 i)} - \frac{\bar{\sigma}_1'((w_1 - w_2) i)}{i \bar{\sigma}_1((w_1 - w_2) i)}$$

Die Formeln (131) repräsentieren 6 Gleichungen u. enthalten im Ganzen sechs Integrationskonstanten, nämlich die Größen $c_1, c_2, c_3, \bar{c}_1, \bar{c}_2, \bar{c}_3$. Sollen diese bestimmt sein, so muß der Anfangszustand des Systems gegeben sein d.h. also die Werthe $\lambda_0, \mu_0, \nu_0, \rho_0, q_0$, welche bei $\lambda, \mu, \nu, \rho, q$ zur Zeit $t = t_0$ besitzen. Indessen können diese Werthe durch aus nicht ganz willkürlich angenommen werden. Da nämlich $\varphi(t_0) = g_3$ ist, so folgt aus den Gleichungen (113) :

$$\lambda_0^2 + \mu_0^2 = \frac{g_3 - c_1}{c_2 - c_1}$$

$$134, \quad \nu_0^2 + \rho_0^2 = \frac{g_3 - c_2}{c_2 - c_1}$$

$$\rho_0^2 + q_0^2 = \frac{4H(g_3 - c_3)}{A(c_2 - c_1)}$$

und daher :

$$135, \quad \left. \begin{aligned} \lambda_0 + \mu_0 i &= \sqrt{\frac{g_3 - c_1}{c_2 - c_1}} e^{K_1 i} \\ \nu_0 + \rho_0 i &= \sqrt{\frac{c_2 - g_3}{c_2 - c_1}} e^{K_2 i} \\ \rho_0 + q_0 i &= \sqrt{\frac{4H(c_3 - g_3)}{A(c_2 - c_1)}} e^{K_3 i} \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} K_1, K_2, K_3 \text{ willkür-} \\ \text{liche Konstanten.} \end{array}$$

Da nun aber :

$$136, \quad (\lambda_0 - \mu_0 i)(\nu_0 + \rho_0 i)(\rho_0 + q_0 i) = \xi_0 - i \zeta_0 = g_3 \text{ ist, so wird:}$$

$$K_2 + K_3 - K_1 = 0$$

us. ferner mit Rücksicht auf (131), für $t = t_0$:

$$137) \quad \bar{C}_1' \bar{C}_2 \bar{C}_3 = \frac{g_3}{\bar{\sigma}_1(w_1, i) \bar{\sigma}_1(w_2, i) \bar{\sigma}_2((w_1 - w_2), i)}$$

worin \bar{C}_1' die zu \bar{C}_1 conjugirte Größe bedeutet. Man sieht, dass:

$$138) \quad \xi - i \xi_1 = g_3 \frac{\bar{\sigma}(t - t_0 + w_1, i) \bar{\sigma}(t - t_0 - w_2, i) \bar{\sigma}_2(t - t_0 - (w_1 - w_2), i)}{\bar{\sigma}_1(w_1, i) \bar{\sigma}_1(w_2, i) \bar{\sigma}_2((w_1 - w_2), i) \bar{\sigma}_3^3(t - t_0)}$$

Ob sich die Constanten $c, c_1, c_2, \bar{C}_1, \bar{C}_2, \bar{C}_3$ mit Hilfe der Constanten w_1, \dots, w_2 ausdrücken lassen, wie es dem Anschein nach, sich mir nicht gelingen, zu beweisen.

Der Fall, wo $r < 0$ ist, lässt sich nach dem Muster des eben behandelten, in welchem $r > 0$ war leicht ausführen.

Anmerkung.

Das allgemeine Problem, die Bewegung eines Systems materieller Punkte zu bestimmen, welches um einen festen Punkt, der nicht zugleich Schwerpunkt ist, rotirt u. auf welches die Schwerkraft wirkt, ist bis jetzt noch nicht gelöst worden. Man hat vielfach geglaubt, dass die Lösung desselben abhängig sein werde von Abel'schen Functionen d. h. von eindeutigen Functionen mehrerer Variablen, welche theils wieder lineare Functionen der Zeit sind. In der That können in der Theorie der Abel'schen Functionen Differentialgleichungen von der Form vor:

$$\frac{dx_\lambda}{dx} = f_\lambda(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad \lambda = 1, 2, \dots, n$$

wo f eine ganze homogene Function zweiten Grades von

x_1, \dots, x_n ist, —. Die somit eine ganz analoge Form haben, wie die Differentialgleichungen „. Indessen ist Weierstrass der Ansicht, dass in jener Weise die Lösung des Problems nicht möglich ist, indem er zeigt, dass durch jene Gleichungen die Größen $\lambda, \mu, \nu, \rho, \varphi, \psi, \chi$ im Allgemeinen nicht als eindeutige Funktionen von t definiert werden, wie es doch die Natur unseres Problems erfordert, vielmehr müssen, wenn dies der Fall sein soll, zwischen den Coefficienten in den Anfangswerten von $\lambda, \mu, \nu, \rho, \varphi, \psi, \chi$ gewisse Relationen bestehen.

Lagrange hat gefunden, dass eine Lösung des Problems möglich sei unter der Voraussetzung, dass der Schwerpunkt stets in der dritten Hauptträgheitsachse liegt u. die Größe φ stets gleich 0 ist, die instantane Drehungsachse also stets in der Ebene der ersten u. dritten Trägheitsachse liegt. In der That haben dann die Schlussformeln eine ähnliche Gestalt wie oben. Dieser Fall hat jedoch mechanisch gar keine Bedeutung.

Die geodetische Linie auf dem Rotations-
ellipsoid.

Die Gleichung des Rotationsellipsoids sei:

$$1) \quad \frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Dieselbe lässt sich aber auch durch zwei Parameter p u. q
wie folgt darstellen:

$$\begin{aligned} 2) \quad x &= a \cos p \cos q \\ y &= a \cos p \sin q \\ z &= c \sin p. \end{aligned}$$

Die Bedeutung dieser Größen p, q für irgend einen Punkt P des
Ellipsoids ist leicht anzugeben. Wir nehmen, um eine bestim-
te Vorstellung zu haben an, dass wir uns ein ellipsoidales
Rotationsellipsoid als um die Bestimmung eines Punktes auf der
Erdoberfläche handle. Dann legen wir das Koordinatensystem so, dass
die positive z -Achse nach dem Nordpol gerichtet ist, sodass also
die xy -Ebene die Erde im Äquator schneidet. Die durch den
Äquator parallelen Ebenen Schnitte des Erdellipsoids sind Krei-
se, welche Parallelkreise heißen u. die vom Äquator aus nach
Norden hin positiv, nach Süden hin negativ gerichtet werden.

Die durch die beiden Pole gelegte Ebene
schneidet die Erde in einer Ellipse,
deren beide Halften, gerechnet von einem
Pol zum andern, Meridiane genannt wer-
den. Um diese zu zeichnen, wählt man den
jenigen, welcher durch einen belie-



big fixierten Punkt des Äquators, dem Aufangspunkt geht, als ersten u. zählt die andern in östlicher Richtung fortschreitend. Dies festgestellt, lege man die positive x -Achse durch den Aufangspunkt des Äquators, so dass also die xz -Ebene den Nullmeridian enthält, u. die positive y -Achse nach der östlichen Seite der xz -Ebene hin. Man denke man sich um den Nullpunkt der Coordinaten eine Kugel mit dem Radius a gelegt u. durch den Punkt P der Erdoberfläche u. die z -Achse eine Ebene, welche die Erdoberfläche in einer Ellipse, die Kugel in einem Kreise schneidet. Jedem Punkte $P = xyz$ der Ellipse entspricht ein Punkt $P' = x'y'z'$ des Kreises, den man erhält, wenn man die z -Coordinate von P bis zum Durchschnitte mit dem Kreise verlängert. Bezeichnet man nun die geographische Breite u. Länge des Punktes P gemessen auf der Kugel bez. mit p u. q , so ist:

$$x' = a \cos p \cos q = x$$

$$y' = a \cos p \sin q = y$$

$$z' = a \sin p$$

Da aber $z' : z = a : c$ ist, so ist auch $z = c \sin p$. Es bedeutet daher q die geographische Länge, p die sogenannte reduzierte geographische Breite des Punktes P . Hieraus folgt zugleich, dass man vermittelt der Formeln (2) jedem Punkt der Erdoberfläche u. zwar jeden nur einmal erhält, wenn man p die Werte von $-\frac{\pi}{2}$ bis $+\frac{\pi}{2}$, beide Grenzen mit eingeschlossen, q dagegen die Werte von 0 bis 2π , letztere Grenze aber ausgeschlossen, durchlaufen lässt.

Diese Größen p, q können wir uns aber auch denken als recht-

wichtige Koordinaten in der Ebene. Dadurch wird jedem Punkte innerhalb eines bestimmten Bereiches der Ebene ein Punkt der Oberfläche des Ellipsoids zugeordnet, jeder Linie in der Ebene wird eine ganz bestimmte Linie auf dem Ellipsoid entsprechen. Eine Linie in der Ebene stellen wir mittelst eines Parameters t dar durch Gleichungen von der Form:
 $p = \varphi(t)$, $q = \chi(t)$. Dabei setzen wir fest, dass die Kurve von ihrem Anfangspunkt bis zu ihrem Endpunkt durchlaufen werden solle, wenn wir t von t_0 bis t_1 gehen lassen, u. ferner, dass zu einem größeren Werte von t ein späterer Punkt der Kurve gehören solle. Dieser Kurve in der Ebene entspricht eine bestimmte Kurve auf dem Ellipsoid. Die Länge derselben zwischen zwei Punkten x, y, z , u. x_1, y_1, z_1 , welche resp. zu den Werten t_0 u. t_1 von t gehören ist:

$$s = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} dt$$

Man ist daher:

$$dx = -a \sin p \cos q dp - a \cos p \sin q dp$$

$$3) \quad dy = -a \sin p \sin q dp + a \cos p \cos q dp$$

$$dz = c \cos p dp$$

Also:

$$4) \quad ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = P dp^2 + Q dq^2, \quad \text{wobei}$$

$$P = a^2 \sin^2 p + c^2 \cos^2 p$$

$$5) \quad Q = a^2 \cos^2 p$$

ist. Folglich wird jetzt, wenn wir $\frac{dp}{dt} = p'$, $\frac{dq}{dt} = q'$ setzen:

$$6) \quad s = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{P p'^2 + Q q'^2} dt = \int_{t_0}^{t_1} F(p, q, p', q') dt.$$

Damit nun dieses Integral ein Minimum sei, ist erforder-

liehe, 1), dass die Funktion \bar{F} den Differentialgleichungen genügt:

$$7) \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial \bar{F}}{\partial p'} - \frac{\partial \bar{F}}{\partial p} = 0 \quad , \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial \bar{F}}{\partial q'} - \frac{\partial \bar{F}}{\partial q} = 0$$

2, dass sich $\frac{\partial \bar{F}}{\partial p'} = \frac{\partial \bar{F}}{\partial q'}$ längs der ganzen Strecke stetig ändern.

3, dass die Größe \bar{F}_1 , welche definiert wird durch eine der Gleichungen:

$$\bar{F}_1 = \frac{1}{q'^2} \frac{\partial^2 \bar{F}}{\partial p'^2} = - \frac{1}{p'q'} \frac{\partial^2 \bar{F}}{\partial p' \partial q'} = \frac{1}{p'^2} \frac{\partial^2 \bar{F}}{\partial q'^2}$$

beständig positiv u. von 0 u. ∞ verschieden sei. Man set:

$$\frac{\partial \bar{F}}{\partial p'} = \frac{Pp'}{\bar{F}}, \quad \frac{\partial^2 \bar{F}}{\partial p' \partial q'} = - \frac{PQp'q'}{\bar{F}^2}, \quad \text{also:}$$

$$8) \quad \bar{F}_1 = \frac{P \cdot Q}{\bar{F}^2}$$

Dies ist eine wesentlich positive Größe, da P, Q, \bar{F} solche sind, letztere deshalb, weil wir annehmen haben, dass mit wachsendem t auch \bar{F} wachsen solle, u. daher $\frac{d\bar{F}}{dt}$ positiv sein muss. Ferner könnte \bar{F}_1 nur dann unendlich groß werden, wenn $\bar{F} = 0$ d.h. also $p' = q' = 0$ wäre, was bei einem Ellipsoid, das keine singulären Punkte besitzt, nicht der Fall sein kann. Daraus folgt zugleich, dass auch die zweite Bedingung erfüllt ist, u. ferner, dass man in der Ebene für die beliebige Anfangsrichtung eine Kurve finden kann, welche der Differentialgleichung (7) genügt. Dieser entspricht auf dem Ellipsoid die geodetische Linie, für welche eine Anfangsrichtung ebenfalls beliebig festgesetzt werden kann. In der 2. Gleichung (7) tritt da in \bar{F} q selbst nicht vor: kommt:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \bar{F}}{\partial q'} = 0 \quad \text{d. i.}$$

$$\frac{\partial \bar{F}}{\partial q'} = K$$

von K eine wirkliche Constante u. für die ganze Strecke
 dieselbe ist, wie aus der Steilheit der Größe $\frac{dz}{dp}$ unmittelbar her-
 vorgeht. Diese Gleichung ist identisch mit der folgenden:

$$\frac{\alpha^2 \cos^2 p q'}{\sqrt{(\alpha^2 \sin^2 p + c^2 \cos^2 p) p^2 + \alpha^2 \cos^2 p q'^2}} = K \quad \text{oder:}$$

$$dq^2 = \frac{K^2 (\alpha^2 \sin^2 p + c^2 \cos^2 p)}{\alpha^2 \cos^2 p - K^2 \alpha^2 \cos^2 p} dp^2.$$

Führen wir die numerische Excentricität des Ellipsoids
 ein, so ist:

$$\varepsilon^2 = \frac{\alpha^2 - c^2}{\alpha^2}, \quad 0 < \varepsilon < 1.$$

also:

$$9, \quad dq^2 = \frac{K^2 (1 - \varepsilon^2 \cos^2 p)}{\cos^2 p (\alpha^2 \cos^2 p - K^2)} dp^2$$

u. somit:

$$10, \quad ds = \frac{\alpha^2 \cos p (1 - \varepsilon^2 \cos^2 p)}{\sqrt{(\alpha^2 \cos^2 p - K^2) (1 - \varepsilon^2 \cos^2 p)}} dp.$$

Welcher Werth der Quadratwurzel beizulegen ist ergibt
 sich leicht, wenn wir an Stelle von $\cos p dp$ setzen $\frac{dz}{c}$. Es wird
 somit, da $1 - \varepsilon^2 \cos^2 p > 0$ ist, die Quadratwurzel positiv oder ne-
 gativ zu nehmen sein, je nachdem z mit wachsendem s
 zu- oder abnimmt. Um dies in jedem Falle entscheiden zu kön-
 nen, hat man einen bestimmten Punkt der Curve auf dem
 Ellipsoid als Anfangspunkt ferner in diesem für die Curve
 eine bestimmte Anfangsrichtung festzusetzen u. wenn der
 Bogen vom Anfangspunkte aus in der gegebenen Anfangsrich-
 tung als positiv, in der entgegengesetzten als negativ zu nehmen.
 Führt man in vorstehende Formel z ein durch die Gleichung:

$$1 - \frac{z^2}{c^2} = \cos^2 p$$

so wird:

$$11) \quad ds = \frac{\alpha^2}{c} \frac{(1 - \varepsilon^2 + \frac{\varepsilon^2 z^2}{c^2}) dz}{\sqrt{Z}}$$

worin:

$$12) \quad Z = (\alpha^2 - \kappa^2 - \frac{\alpha^2 z^2}{c^2}) (1 - \varepsilon^2 + \frac{\varepsilon^2 z^2}{c^2})$$

ist. Aus der Gleichung (11) ist nun z als Funktion von s zu bestimmen. Aus dieser Gleichung folgt aber auf Grund der allgemeinen Bemerkungen par. 56 str. unmittelbar, dass z eine reellperiodische Funktion von s ist. Für alle reellen Werte, welche z überhaupt annehmen kann ... n. Diese liegen zwischen $-c$... $+c$... verschwindet nämlich die Funktion Z nur an den beiden Stellen $\pm z_0 = \frac{c}{\alpha} \sqrt{\alpha^2 - \kappa^2}$. Diese Werte sind wirklich reell n. zwischen $-c$... $+c$ enthalten, da, wie aus (9) hervorgeht, $\alpha^2 \cos^2 p - \kappa^2 > 0$ also auch $\alpha > \kappa$ ist. Schreiben wir somit unsere Gleichung (11) in der Form:

$$\begin{aligned} \left(\frac{dz}{ds}\right)^2 &= - \frac{1}{\alpha^2} (z - z_0)(z + z_0) \frac{1}{1 - \varepsilon^2 + \frac{\varepsilon^2 z^2}{c^2}} \\ &= (z_0 - z)(z_0 + z) f(z) \end{aligned}$$

so ist $f(z)$ eine Funktion, welche in dem Intervalle $-z_0$... $+z_0$ beständig positiv ist n. in den Grenzen selbst nicht verschwindet. Mithin wird nach par. 56 durch obige Gleichung in der z als reellperiodische stets endlichbleibende Funktion der unbeschränkt veränderlichen reellen Größe s definiert, welche beständig zwischen den Grenzen $-z_0$... $+z_0$ liegt n. diese Grenzen selbst unendlich oft erreicht. - Hierdurch gewinnen wir bereits eine deutliche Vorstellung vom dem Verlaufe der geodetischen Linie auf dem Erdellipsoid. Alle Punkte nämlich, für welche z denselben

Werte hat, liegen auf einem Parallelkreise. Mittels fünf
 die geodetische Linie beständig zwischen \bar{x} symmetrisch zum
 Aquator gelegenen Parallelkreisen hin u. her u. berührt diesel-
 ben. Diese Berührungspunkte bleiben aber nicht dieselben,
 sondern folgen, wie wir sehen werden, für die einzelnen
 Umläufe in gleichem Abstände aufeinander. Diese Vorstel-
 lung wird aber noch klarer, wenn wir auf die geometrische
 Bedeutung der Constanten K etwas näher eingehen. Eine Defi-
 nition von K kann unmittelbar aus der Gleichung:

$$z_0 = \frac{c}{a} \sqrt{x^2 - K^2}$$

abgeleitet werden. Nennen wir p_0 die reduzierte Breite des
 Parallelkreises $z = z_0$, so ist $z_0 = c \sin p_0$, u. somit wird:

$$13, \quad K = a \cos p_0$$

Es ist daher K die x -Coordinate des Punktes, in welchem
 der Parallelkreis $z = z_0$ die xz -Ebene schneidet. Man kann
 aber K noch anders definieren. Die geodetische Linie auf der
 Erde ist erst dann bestimmt, sobald außer der geographi-
 schen Länge u. Breite des Punktes, von welchem sie ausgeht,
 noch ihr Krümmung $\bar{\epsilon}$ oder ihre Anfangsrichtung gegeben ist,
 d. h. der Winkel, welchen der nach Norden gerichtete Theil des
 Meridians mit der Anfangsrichtung der geodetischen Linie
 bildet. Dabei ist zu beachten, dass dieser Winkel vom Meridian
 aus nach Osten hin gerechnet wird, so dass $\bar{\epsilon}$ zwischen 0
 u. 2π liegen kann. Diesen Winkel kann man nun leicht aus
 p_0 u. K berechnen. Es sind nämlich die Richtungsriemen

des Meridianelementes im Punkte p, q , da für den Meridian $q = \text{const}$ ist, resp:

$$\left(\frac{dx}{ds}\right)_{q=\text{const}} = -\alpha \sin p \cos q \left(\frac{dp}{ds}\right)_{q=\text{const}} = \frac{-\alpha \sin p \cos q}{\sqrt{\alpha^2 \sin^2 p + c^2 \cos^2 q}}$$

$$\left(\frac{dy}{ds}\right)_{q=\text{const}} = -\alpha \sin p \sin q \left(\frac{dp}{ds}\right)_{q=\text{const}} = \frac{-\alpha \sin p \sin q}{\sqrt{\alpha^2 \sin^2 p + c^2 \cos^2 q}}$$

$$\left(\frac{dz}{ds}\right)_{q=\text{const}} = c \cos p \left(\frac{dp}{ds}\right)_{q=\text{const}} = \frac{c \cos p}{\sqrt{\alpha^2 \sin^2 p + c^2 \cos^2 q}}$$

Die Richtungscoefficienten des Elementes der geodetischen Linie im Punkte p, q sind $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$, $\frac{dz}{ds}$ u. ihre Werte werden gefunden, indem man die Gleichungen (3) durch ds dividirt. Multipliziert man nun vorstehende Gleichungen resp. mit $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$, $\frac{dz}{ds}$ u. addirt sie dann, so wird schließlich:

$$14, \quad \cos \delta = \alpha \sqrt{1 - \varepsilon^2 \cos^2 p} \frac{dp}{ds}$$

Setzt man hierin für $\frac{dp}{ds}$ seinen Werth aus (10) ein, so erhält man nach leichtler Umformung die Formel:

$$15, \quad K = \alpha \cos p \sin \delta.$$

Vergleicht man hiermit den früheren Werth von K :

$$K = \alpha \cos p_0$$

so ergibt sich hieraus, dass für $p = p_0$ $\sin \delta = 1$ also $\delta = \frac{\pi}{2}$ ist d.h. die geodetische Linie schneidet unter der Breite $p = p_0$ den Meridian rechtwinklig. Hierdurch wird bewiesen, dass die geodetische Linie den Parallelkreis $\lambda = \lambda_0$ berührt.

Wir wollen hier gleich noch eine Formel ableiten, die wir später brauchen werden. Die die wahre Breite φ eines Ortes aus seiner reduirten finden lehrt. Unter der wahren Breite eines

Ortes versteht man den Winkel, welchen die Normale der Fläche in jenem Punkte mit der Ebene der Aquator bildet, folglich ist:

$$16) \quad \sin \varphi = \frac{a \sin p}{\sqrt{a^2 \sin^2 p + c^2 \cos^2 p}}, \quad \cos \varphi = \frac{c \cos p}{\sqrt{a^2 \sin^2 p + c^2 \cos^2 p}}$$

mithin:

$$17) \quad \tan \varphi = \frac{a}{c} \tan p = \frac{\tan p}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}}$$

Wir gehen nunmehr wieder zu der Formel für z zurück. Es war:

$$ds = \frac{a^2}{c} \frac{(1 - \varepsilon^2 + \frac{\varepsilon^2 z^2}{c^2}) dz}{\sqrt{z}}$$

Wir wollen jedoch nicht s als Parameter behalten, sondern eine neue Größe einführen mittelst der Gleichung:

$$18) \quad du = \frac{dz}{\sqrt{z}}$$

Durch dieselbe wird z als elliptische Function von u definiert, wir setzen dabei fest, dass für $u=0$ z seinen größten Werth z_0 annehmen solle. Denken wir uns ferner den Nullpunkt von s in einem derjenigen Punkte gelegt, für welchen $z=z_0$ ist, so können wir, da:

$$\frac{d}{ds} = \frac{c}{a^2} \frac{1}{1 - \varepsilon^2 + \frac{\varepsilon^2 z^2}{c^2}}$$

positiv ist, also u mit s wächst, den Nullpunkt von u in den von s verlegen, u. es wird dann u gleichzeitig mit s wachsen u. abnehmen. Wird $s = +\infty$, so wird auch $u = +\infty$. Ueberhaupt entspricht jedem Werthe von s zwischen $-\infty$ u. $+\infty$ ein bestimmter Werth von u zwischen $-\infty$ u. $+\infty$ u. umgekehrt.

Mithin ist z , welches eine stetige Function von s ist, auch eine stetige Function von u von der Beschaffenheit, dass wenn u alle Werthe von $-\infty$ bis $+\infty$ durchläuft, z alle Werthe von $-z_0$ bis $+z_0$ annimmt.

Ist z als eindeutige Funktion von u bestimmt, so kann man auch leicht x u. y berechnen. Es ist nämlich:

$$x + yi = a \cos p e^{qi} \quad \text{also:}$$

$$\begin{aligned} d \log(x + yi) &= - \frac{\sin p}{\cos p} dp + i dq \\ &= \frac{1}{2} \frac{d(z^2)}{z^2 - c^2} + i K C \frac{(1 - \varepsilon^2 + \frac{\varepsilon^2 z^2}{c^2}) dz}{(c^2 - z^2) \sqrt{\varepsilon}} \end{aligned}$$

oder:

$$d \log(x + yi) = \frac{1}{2} \frac{d(z^2)}{z^2 - c^2} - \frac{i K C du}{z^2 - c^2} - \frac{i K \varepsilon^2}{c} du.$$

Folglich erhalten wir zur Bestimmung von z u. y als Funktionen von u die beiden Gleichungen:

$$\begin{aligned} 19, \quad \left(\frac{dz}{du} \right)^2 &= \frac{1}{2} \\ \frac{d \log(x + yi)}{du} &= \frac{1}{2} \frac{\frac{d(z^2)}{du} - 2 i K C}{z^2 - c^2} - \frac{i K \varepsilon^2}{c} \end{aligned}$$

Durch die erste Gleichung wird z u. somit auch z^2 als elliptische Funktion von u definiert. Setzen wir nämlich:

$$20, \quad z^2 = \xi = \varphi(u),$$

so wird:

$$\left(\frac{d\xi}{du} \right)^2 = 4 \xi^2 \left(\frac{dz}{du} \right)^2 = 4 \xi^2 \frac{1}{2} \quad \text{mithin:}$$

$$21, \quad \left(\frac{d\xi}{du} \right)^2 = 4 \xi \left(a^2 - K^2 - \frac{a^2 \xi}{c^2} \right) \left(1 - \varepsilon^2 + \frac{\varepsilon^2 \xi}{c^2} \right) = R(\xi).$$

Da z , wie wir gesehen, bestimmt zwischen den Grenzen $-\frac{c}{a} \sqrt{a^2 - K^2}$ u. $+\frac{c}{a} \sqrt{a^2 - K^2}$ liegt, so liegt ξ bestimmt zwischen den Grenzen 0 u. $\frac{c^2}{a^2} (a^2 - K^2)$ oder, was dasselbe, zwischen 0 u. $c^2 \sin^2 p_0$; es ist also bestimmt kleiner als c^2 u. erreicht die Grenze c^2 nur dann, wenn $p_0 = \frac{\pi}{2}$ ist, was nur in dem Falle eintritt, wo die geodetische Linie mit dem Meridian zusammenfällt. Zur Lösung dieser Differentialgleichung schlagen wir einen bereits pag. 12 u. s. f. angedeuteten Weg ein. Ist nämlich die Differentialgleichung vorgelegt:

$$\varphi'^2(u) = 4B\varphi^3(u) + 6C\varphi^2(u) + 4B'\varphi(u) + A'$$

so ergibt sich das Integral derselben aus der Formel:

$$p(u-u') = B\varphi(u) + \frac{1}{2}C,$$

wo u' einen der Werte von u bedeutet, für den $\varphi(u) = \infty$ wird.

Setzt man $p(u-u') = s$, $\varphi(u) = x$, so wird:

$$(22) \quad s = Bx + \frac{1}{2}C.$$

Hiervaus folgt:

$$\left(\frac{ds}{dx}\right)^2 = B^2 \left(\frac{dx}{du}\right)^2 \quad \text{oder:}$$

$$4(s-e_1)(s-e_2)(s-e_3) = B^2 R(x)$$

d. h. diejenigen Werte von x , welche den Werten e_1, e_2, e_3 von s entsprechen, sind Wurzeln der Gleichung $R(x) = 0$. Ferner folgt aus

(22), dass wenn die Wurzeln dieser Gleichung reell sind, auch

die Größen e sämtlich reell sind. Sind daher die Wurzeln

der Gleichung $R(x) = 0$ in der Ordnung, in welcher sie den drei

Größen e_1, e_2, e_3 entsprechen resp $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, so folgt aus (22):

$$s - e_1 = B(x - \alpha_1)$$

$$(23) \quad s - e_2 = B(x - \alpha_2)$$

$$s - e_3 = B(x - \alpha_3)$$

u. somit:

$$e_1 - e_2 = B(\alpha_1 - \alpha_2)$$

$$(24) \quad e_2 - e_3 = B(\alpha_2 - \alpha_3)$$

$$e_1 - e_3 = B(\alpha_1 - \alpha_3)$$

Werden die Größen e wie gewöhnlich in der Reihenfolge

$e_1 > e_2 > e_3$ genommen, so sind die Größen α entweder in der Ord-

nung $\alpha_1 > \alpha_2 > \alpha_3$ oder in der folgenden: $\alpha_3 > \alpha_2 > \alpha_1$ zu nehmen,

je nachdem B positiv oder negativ ist. —

In unserem Falle ist nun B negativ, dannes ist $B = -\frac{a^2 \varepsilon^2}{c^4}$.

Folglich ist die größte Wurzel von $R(\xi) = 0$ mit α_3 , die kleinste mit α_1 , zu bezeichnen. Hithin ergibt sich:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= -\frac{c^2}{\varepsilon^2} (1 - \varepsilon^2) \\ 25, \quad \alpha_2 &= 0 \\ \alpha_3 &= \frac{c^2}{\alpha^2} (\alpha^2 - \kappa^2) = c^2 \sin^2 p_0 \end{aligned}$$

hieraus:

$$\begin{aligned} \ell_1 - \ell_2 &= 1 \\ 26, \quad \ell_2 - \ell_3 &= \frac{\alpha^2 \varepsilon^2}{c^2} \sin^2 p_0 \\ \ell_1 - \ell_3 &= \frac{\alpha^2}{c^2} (1 - \varepsilon^2 \cos^2 p_0) \end{aligned}$$

Für ξ selbst erhalten wir aus (22) die Gleichungen:

$$\begin{aligned} p(u - u') - \ell_1 &= -\frac{\alpha^2 \varepsilon^2}{c^2} \xi - 1 \\ 27, \quad p(u - u') - \ell_2 &= -\frac{\alpha^2 \varepsilon^2}{c^2} \xi \\ p(u - u') - \ell_3 &= -\frac{\alpha^2 \varepsilon^2}{c^2} \xi + \frac{\alpha^2 \varepsilon^2}{c^2} \sin^2 p_0 \end{aligned}$$

Da ξ für reelle Werthe von u niemals unendlich groß werden kann, so kann u' nicht reell sein, ferner folgt aber aus den letzten beiden Gleichungen, da $0 < \xi < c^2 \sin^2 p_0$ ist, dass der Werth von $p(u - u')$ zwischen ℓ_2 u. ℓ_3 liegt. Daraus geht aber hervor, dass u' stets auf die Form gebraucht werden kann: $u' = u_0 + w'$, wo u_0 eine reelle Größe ist. Somit ergibt sich aus der letzten Gleichung:

$$- \ell_3 + p(u - u_0 - w') = -\frac{\alpha^2 \varepsilon^2}{c^2} (\xi - c^2 \sin^2 p_0)$$

Man set also:

$$28, \quad p(u - u_0 - w') - \ell_3 = \frac{(\ell_1 - \ell_3)(\ell_2 - \ell_3)}{p(u - u_0) - \ell_3} = \frac{(\ell_1 - \ell_3)(\ell_2 - \ell_3) \sigma^2(u - u_0)}{\sigma_3^2(u - u_0)}$$

Folglich erhalten wir:

$$29, \quad \frac{\xi}{c^2} = \sin^2 p_0 - \frac{c^2}{\alpha^2 \varepsilon^2} (\ell_1 - \ell_3)(\ell_2 - \ell_3) \frac{\sigma^2(u - u_0)}{\sigma_3^2(u - u_0)}$$

Auf dieselbe Gleichung kommt man mit Hilfe der beiden ersten Gleichungen (27), wie man eine Wurzel ermittelt. Sie ist einer der wesentlichen Theile der Lösung fertig, wie wir weiter unten zeigen werden.

Wir behandeln jetzt umgekehrt die 3^{te} Gleichung (19) weiter. Dieselbe ist:

$$\begin{aligned}\frac{d \log(x+yi)}{du} &= -\frac{iK\xi^2}{c} + \frac{1}{2} \frac{\frac{d\xi}{du} - 2iKc}{\xi - c^2} \\ &= -\frac{iK\xi^2}{c} + \frac{1}{2} \frac{\varphi'(u) - 2iKc}{\varphi(u) - c^2}\end{aligned}$$

Man kann nun stets ein Argument u , so bestimmen, dass für dasselbe:

$$30, \quad \varphi(u_1) = c^2 \quad \text{u.} \quad \varphi'(u_1) = -2iKc$$

ist. In der That ist für $u = u_1$, d. h. für $\varphi(u) = c^2$ nach (21)

$$\varphi''(u) = -4c^2K^2, \quad \text{also} \quad \varphi'(u) = \pm 2iKc$$

Ist dieses geschehen, so wird:

$$\frac{d \log(x+yi)}{du} = -\frac{iK\xi^2}{c} + \frac{1}{2} \frac{\varphi'(u) + \varphi'(u_1)}{\varphi(u) - \varphi(u_1)}$$

also durch Integration:

$$31, \quad x+yi = C \frac{\sigma(u-u_1)}{\sigma(u-u'_1)} e^{\left(-\frac{iK\xi^2}{c} + \frac{\sigma'(u-u_1)}{\sigma(u-u'_1)}\right)(u-u_1)}$$

worin C eine Integrationsconstante ist. Wir haben zu-
nächst die Größe u , weiter zu bestimmen. Da für $u = u_1$,

$\xi = c^2$ u. $\frac{d\xi}{du} = -2iKc$ wird, so folgt aus der 3^{ten} Gleichung (27):

$$\begin{aligned}32, \quad p(u, -u'_1) - c_3 &= -\frac{K^2\xi^2}{c^2} \quad \text{u.} \\ p'(u, -u'_1) &= i \cdot \frac{2c^2\xi^2K}{c^3}\end{aligned}$$

d. h. es für $u = u_1$, der Werth von $p(u - u'_1)$ negativ u. Der Werth der Ableitung eine positive rein imaginäre Größe. Folglich liegt $u_1 - u'_1$ zwischen 0 u. $-\omega'$ oder es ist:

$$u_1 - u'_1 = -w'i, \quad \text{wobei } w' \text{ reell ist u. zwischen } 0 \text{ u. } \frac{\omega'}{i} \text{ liegt, also}$$

$$u_1 = u'_1 - w'i = u_0 + \omega' - w'i = u_0 + wi, \quad \text{wobei } w \text{ eine posi-}$$

tive reelle Größe ist. Setzen wir dies in (32) ein, so ergibt sich zur Bestimmung von w die Gleichung:

$$p(\omega i - \omega') - \epsilon_3 = -\frac{\kappa^2 \epsilon^2}{c^2}$$

oder man

$$1, \quad p(\omega i) - \epsilon_3 = -\frac{c^2(\epsilon_1 - \epsilon_3)(\epsilon_2 - \epsilon_3)}{\kappa^2 \epsilon^2}, \quad \text{woraus noch folgt}$$

$$33, \quad 2, \quad p(\omega i) - \epsilon_2 = -\left(1 + \frac{c^2}{\kappa^2 \epsilon^2}(\epsilon_1 - \epsilon_3)\right)(\epsilon_2 - \epsilon_3)$$

$$3, \quad p(\omega i) - \epsilon_1 = -\left(1 + \frac{c^2}{\kappa^2 \epsilon^2}(\epsilon_2 - \epsilon_3)\right)(\epsilon_1 - \epsilon_3)$$

Dividiert man die letzte dieser Gleichungen durch die erste, so findet man mit Benützung der Formeln (26) u. der Formel $p u - \epsilon_1 = \left(\frac{\tilde{\sigma}_1 u}{\tilde{\sigma}_3 u}\right)^2$:

$$\frac{\tilde{\sigma}_1^2(\omega i)}{\tilde{\sigma}_3^2(\omega i)} = \frac{1}{\sin^2 p_0} \quad ;$$

hieraus folgt, daß $\frac{\tilde{\sigma}_1}{\tilde{\sigma}_3}$ für den angegebenen Werth von ω positiv sein muß:

$$1) \quad \frac{\tilde{\sigma}_1(\omega i)}{\tilde{\sigma}_3(\omega i)} = \frac{1}{\sin p_0} \quad \text{Analog findet man noch:}$$

$$34, \quad 2) \quad \frac{\tilde{\sigma}_2(\omega i)}{\tilde{\sigma}_3(\omega i)} = \frac{1}{\sqrt{1 - \epsilon^2 \cos^2 p_0}} \quad \text{u. analog aus (23) }^E,$$

$$3) \quad \frac{\tilde{\sigma}(\omega i)}{\tilde{\sigma}_3(\omega i)} = i \operatorname{ctg} p_0 \frac{\sqrt{1 - \epsilon^2}}{\sqrt{1 - \epsilon^2 \cos^2 p_0}}$$

Die Gleichung (34^E) ist am bequemsten zur Bestimmung von ω , umgekehrt kann dieselbe dazu dienen, die Constante p_0 durch ω zu ersetzen. Setzen wir jetzt in Gleichung (29) für $\frac{c^2}{\kappa^2 \epsilon^2}(\epsilon_2 - \epsilon_3)$ aus (26) seinen Werth, so wird:

$$\frac{\xi}{c^2} = \sin^2 p_0 \left(1 - (\epsilon_1 - \epsilon_3) \frac{\tilde{\sigma}_1^2(u - u_0)}{\tilde{\sigma}_3^2(u - u_0)}\right)$$

Wendet man nun hierauf die allgemeine Formel:

$$\tilde{\sigma}_x^2 u - \tilde{\sigma}_p^2 u + (\epsilon_x - \epsilon_p) \tilde{\sigma}^2 u = 0$$

an, so findet man einfach:

$$\frac{\xi}{c^2} = \sin^2 p_0 \frac{\tilde{\sigma}_1^2(u - u_0)}{\tilde{\sigma}_3^2(u - u_0)}, \quad \text{also}$$

$$35, \quad \xi = c \sin p_0 \frac{\tilde{\sigma}_1(u - u_0)}{\tilde{\sigma}_3(u - u_0)} = c \frac{\tilde{\sigma}_3(\omega i) \tilde{\sigma}_1(u - u_0)}{\tilde{\sigma}_1(\omega i) \tilde{\sigma}_3(u - u_0)}$$

Führt man in (31) für u , die Größe w ein, verhält man:

$$x + yi = C_1 \frac{\bar{G}(wi - u + u_0)}{\bar{G}_3(u - u_0)} e^{i \left(-\frac{\kappa \varepsilon^2}{c} + \frac{\bar{G}_3'(wi)}{i \bar{G}_3(wi)} \right) (u - u_0)}$$

Man möge für $u = u_0$, $x = x_0$, $y = y_0$ sein, dann ist:

$$x_0 + y_0 i = \alpha \cos p_0 e^{q_0 i} = C_1 \bar{G}(wi) \quad \text{also:}$$

$$C_1 = \frac{\alpha \cos p_0}{\bar{G}(wi)} e^{q_0 i}$$

Nach (34²⁺³) folgt aber:

$$i \cos p_0 \sqrt{1 - \varepsilon^2} = \frac{\bar{G}(wi)}{\bar{G}_2(wi)} \sin p_0, \quad \text{also } \alpha \cos p_0 = \frac{\alpha \sin p_0}{i \sqrt{1 - \varepsilon^2}} \frac{\bar{G}(wi)}{\bar{G}_2(wi)}$$

$$\alpha \cos p_0 = \frac{\alpha^2}{c} \frac{\bar{G}(wi)}{i \bar{G}_2(wi)} \frac{\bar{G}_3(wi)}{\bar{G}_1(wi)}, \quad \text{also:}$$

$$C_1 = \frac{\alpha^2 \bar{G}_3(wi)}{i c \bar{G}_1(wi) \bar{G}_2(wi)} e^{q_0 i}$$

Setzt man diesen Ausdruck für $x + yi$:

$$36) \quad x + yi = \frac{\alpha^2}{c} \frac{\bar{G}_3(wi) \bar{G}(wi - u + u_0)}{i \bar{G}_1(wi) \bar{G}_2(wi) \bar{G}_3(u - u_0)} e^{i \left\{ q_0 + \left[-\frac{\kappa \varepsilon^2}{c} + \frac{\bar{G}_3'(wi)}{i \bar{G}_3(wi)} \right] (u - u_0) \right\}}$$

Durch die Formeln (35) u. (36) werden nun die Coordinaten x u. y eines Punktes der geodetischen Linie als Funktionen derselben Größe u ausgedrückt. Wie bereits oben bemerkt, kann man den Anfangspunkt der Curve in einem der Punkte legen, in welchem die Curve den nördlichen Parallelkreis berührt. Man kann dann auch den Nullpunkt von u in diesen Punkt verlegen u. somit $u_0 = 0$ setzen.

Wenn wir dies²⁰ wird:

$$37) \quad x + iy = \frac{\alpha^2}{c} \frac{\bar{G}_3(wi) \bar{G}(wi - u)}{i \bar{G}_1(wi) \bar{G}_2(wi) \bar{G}_3 u} e^{i \left\{ q_0 + u \left[-\frac{\kappa \varepsilon^2}{c} + \frac{\bar{G}_3'(wi)}{\bar{G}_3(wi)} \right] \right\}}$$

Statt der Coordinaten braucht man in der Geodäsie fast nur die Länge u. Breite eines Punktes der geodetischen Linie. Dieselben erhalten wir aus vorstehenden Gleichungen sehr einfach

mit Hilfe der Gleichungen (2). Es folgt:

$$38, \quad \begin{aligned} \sin p &= \sin p_0 \frac{\bar{\sigma}_1(u)}{\bar{\sigma}_3(u)} \\ \cos p e^{qi} &= \cos p_0 \frac{\bar{\sigma}(wi-u)}{\bar{\sigma}(wi)\bar{\sigma}_3 u} e^{i \left\{ q_0 + u \left[-\frac{\kappa \bar{\epsilon}^2}{c} + \frac{\bar{\sigma}_3'(wi)}{\bar{\sigma}_3(wi)} \right] \right\}} \end{aligned}$$

Genau ähnliche Ausdrücke findet man für die wahre Breite γ eines Punktes der geodetischen Linie. Man braucht sich dazu nur an die Formeln (16) zu erinnern, auf Grund deren aus den vorstehenden die folgenden Gleichungen abgeleitet werden:

$$39, \quad \begin{aligned} \sin \gamma &= \sin \gamma_0 \frac{\bar{\sigma}_1(u)}{\bar{\sigma}_2(u)} = \frac{\bar{\sigma}_2(wi)\bar{\sigma}_1(u)}{\bar{\sigma}_1(wi)\bar{\sigma}_2(u)} \\ \cos \gamma e^{qi} &= \cos \gamma_0 \frac{\bar{\sigma}(wi-u)}{\bar{\sigma}(wi)\bar{\sigma}_2 u} e^{i \left\{ \gamma_0 + u \left[-\frac{\kappa \bar{\epsilon}^2}{c} + \frac{\bar{\sigma}_2'(wi)}{\bar{\sigma}_2(wi)} \right] \right\}} \end{aligned}$$

Mit Hilfe der Formel (10) läßt sich auch leicht der Bogen s der geodetischen Linie als Funktion von u ausdrücken. Wir nehmen dabei an, dass für $u=0$ auch $s=0$ sei. Es läßt sich nun leicht Gleichung (11) auf die Form bringen:

$$\begin{aligned} \frac{ds}{c} &= \left(1 + (e_2 - e_3) \frac{\bar{\sigma}_1^2 u}{\bar{\sigma}_3^2 u} \right) du \\ &= \left(1 + (e_2 - e_3) \frac{p u - e_1}{p u - e_3} \right) du \\ &= (e_1 - e_2) du - \frac{(e_1 - e_3)(e_2 - e_3)}{p u - e_3} du \\ &= e_1 du - p(u + w') du \end{aligned}$$

also wenn wir zwischen $0 = u$ integrieren:

$$\begin{aligned} \frac{s}{c} &= e_1 u - \int_0^u p(u + w') du \\ &= e_1 u - \int_{w'}^{u+w'} p u du \end{aligned}$$

Mithin:

$$40, \quad s = c \left(e_1 u + \frac{\bar{\sigma}_3^2 u}{\bar{\sigma}_3 u} \right)$$

Betrachten wir nun die Gleichungen (38) - (40), so ist ρ eine periodische Function mit der reellen Periode 4ω , φ und σ aber nicht, vielmehr ändern sich diese jedesmal um eine bestimmte constante Größe. Hieraus folgt, dass die geodetische Linie in ihrer unbegrenzten Ausdehnung gewissen einem denselben Parallelkreis unendlich oft durchkreuzet, oder so, dass die Schnittpunkte in gleicher Abstände aufeinander folgen. Die Bogenlänge der geodetischen Linie zwischen zwei solchen aufeinander folgenden Schnittpunkten ist stets dieselbe. Was von diesen Schnittpunkten gilt, gilt auch für die Berührungspunkte mit dem nördlichsten resp. südlichsten Parallelkreis, womit die Bemerkung, pag. 147 bestätigt wird. Die geodetische Linie schließt sich im Allgemeinen nicht ab, sie kehrt im Allgemeinen zu demselben Punkte nicht wieder zurück, sie wird mithin das Ellipsoid vollständig umspinnen, indessen kann man nicht behaupten, dass ein beliebiger Punkt desselben von jeder beliebigen geodetischen Linie wirklich erreicht wird, obwohl man ihm stets unendlich nahe kommen kann. - Daraus folgt aber, dass sich zwei von demselben Punkte ausgehende geodetischen Linien einmal schneiden müssen. Der erste Schnittpunkt ist der zum Ausgangspunkte conjugirte Punkt, bis zu welchem hin der Bogen der geodetischen Linie wirklich die kürzeste Länge hat, wie in der Variationstheorie gezeigt ist.

Entwicklung der elliptischen Functionen in Fourier'sche Reihen.

In den durchgeführten Beispielen setzten sich die Schlussformeln stets aus Factoren von folgender Gestalt zusammen:

$$\frac{\sigma(u-v_1)}{\sigma(u-v_2)} e^{gu+g'}$$

worin g, g' Constanten u. v_1, v_2 theils rein imaginäre const. Größen, theils Perioden waren. Ferner bedeute u stets eine reelle Größe. Drückt man vorstehenden Ausdruck durch σ -Functionen aus, so nimmt die Form an:

$$\frac{\sigma\left(\frac{u-v_1}{2\omega}\right)}{\sigma\left(\frac{u-v_2}{2\omega}\right)} e^{g_1 u + g'_1}$$

u. in dieser erkennt man leicht, dass er abgesehen vom dem Exponentialfactor eine periodische Function — der reellen Periode 2ω darstellt. Ein solcher Quotient von σ -Functionen läuft mit u innerhalb eines Bereiches, in welchem er nicht unendlich groß wird, in eine Fourier'sche Reihe oder in eine Reihe von der Form:

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} A_n e^{\frac{n\pi i}{2\omega} u}$$

entwischen. Obwohl die σ -Reihen so stark convergiren, dass man bei den meisten praktischen Anwendungen mit den beiden ersten Gliedern ausreicht, so ist eine dergleichen Entwicklung der Quotienten in eine Fourier'sche Reihe, obwohl im Allgemeinen weniger stark convergent, für viele Zwecke doch angemessener, weshalb wir im Folgenden die allgemeine Theorie dieser Entwicklungen geben wollen.

Es sei gegeben die Function:

$$\varphi(u) = \frac{\sigma(u-a_1)\sigma(u-a_2)\dots\sigma(u-a_r)}{\sigma(u-b_1)\sigma(u-b_2)\dots\sigma(u-b_s)} e^{gu+g'}$$

Dieselbe ist eine doppelt-periodische Function, sobald $\sum_1^r a_i = \sum_1^s b_i$ ist. Folgen wir voraus, dass der Nenner für reelle Werthe von u

nicht verschwindet u. setzen wir zur Abkürzung:

$$1) \quad \sum (\alpha_i - b_i) = c,$$

so ist:

$$\varphi_i(u + 2\omega) = \varphi_i(u) e^{-2\gamma c + 2\gamma \omega}$$

$$\varphi_i(u + 2\omega') = \varphi_i(u) e^{-2\gamma' c + 2\gamma' \omega'}$$

u. es würde somit $\varphi_i(u)$ eine Funktion mit der reellen Periode 2ω sein, wenn $\gamma = \frac{\gamma c}{\omega}$ wäre. Wir können aber: unser γ in zwei Theile zerlegen, dass $\gamma = \frac{\gamma c}{\omega} + \gamma_0$ ist, setzen wir dann

$$2) \quad \varphi(u) = \frac{\zeta(u - a_1) \zeta(u - a_2) \dots \zeta(u - a_r)}{\zeta(u - b_1) \zeta(u - b_2) \dots \zeta(u - b_r)} e^{\frac{\gamma c u}{\omega} + \gamma_0 u}$$

so haben wir:

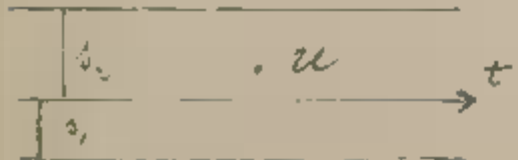
$$\varphi_i(u) = \varphi(u) \cdot e^{\gamma_0 u} \quad \text{und:}$$

$$\varphi(u + 2\omega) = \varphi(u)$$

$$3) \quad \varphi(u + 2\omega') = \varphi(u) e^{\frac{\pi i c}{\omega}}$$

Man sieht $\varphi(u)$ eine reell periodische Funktion von u mit der Periode 2ω , welche überdies noch die Eigenschaft hat, dass sie, wenn man ihr Argument um $2\omega'$ verschiebt, in sich selbst übergeht, multiplicirt mit einer Constanten. Ist $c = 0$, so ist die Funktion $\varphi(u)$ eine Doppelperiodische. Wir nehmen jedoch an, dass c vollkommen willkürlich sei u. wollen $\varphi(u)$ in eine Fouriers'sche Reihe entwickeln u. den Gültigkeitsbereich der Entwicklung feststellen suchen.

Es sei überhaupt $\varphi(u)$ eine eindeutige reell periodische Funktion, definiert für alle complexen Werthe von u , deren imaginärer Theil zwischen 2 gegebenen Grenzen liegt. Ist also $u = t + si$, so soll $\varphi(u)$ definiert sein als eine eindeutige analytische Function für alle reellen Werthe von t u. alle Werthe von s zwischen zwei Grenzen $-s_1$ u. $+s_2$. Das Gebiet von u ist also ein Paralle-



logramm, das begrenzt wird von zwei in der

Entwicklung φ , resp. φ , zur reellen Achse parallel laufenden Linien. Liegt nun s zwischen diesen Grenzen u. t zwischen $+\omega$ u. $-\omega$, so ist betrachtet als Function von t die Fouriersche Entwicklung:

$$\varphi(t+si) = \sum_{-\infty}^{+\infty} A_n e^{\frac{vt\pi i}{\omega}} \\ 2\omega A_n = \int_{-\omega}^{+\omega} \varphi(t+si) e^{-\frac{vt\pi i}{\omega}} dt$$

Diese Entwicklung gilt aber auch für alle Werthe von t , denn aus den beiden Grenzen $-\omega$ u. ω stellt die Entwicklung zum mindesten immer den Mittelwerth $\frac{1}{2} (\varphi(-\omega+si) + \varphi(+\omega-si))$ dar; Dieser ist aber, da $\varphi(u)$ die reelle Periode 2ω hat gleich dem Werthe der Function in diesen Grenzen selbst; Daraus folgt aber, dass die Reihe den Werth der Function für jeden reellen Werth von t gibt, wenn nur die Coefficienten A_n so bestimmt, dass die Reihe für das Intervall $-\omega \dots +\omega$ richtig ist. Die Coefficienten A_n werden nun Functionen von s sein, um dieselben zu berechnen, setzen wir:

$$2\omega A_n = e^{\frac{vsi\pi i}{\omega}} \int_{-\omega}^{+\omega} e^{-\frac{vt\pi i}{\omega}(t+si)} \varphi(t+si) dt \\ = e^{\frac{vsi\pi i}{\omega}} \int_{-\omega}^{+\omega} \varphi(t+si) dt$$

Die Function $\varphi(t+si)$ ist ebenfalls reell periodisch mit der Periode 2ω u. besitzt für alle reellen Werthe von t denselben Charakter wie $\varphi(t+si)$, d.h. sie ist innerhalb des Parallelschiefens eine reguläre analytische Function; folglich ist, wenn wir setzen:

$$S = \int_{-\omega}^{+\omega} \varphi(t+si) dt \\ \frac{dS}{ds} = i \int_{-\omega}^{+\omega} \varphi'(t+si) dt = i \{ \varphi(\omega+si) - \varphi(-\omega+si) \}$$

mithin, da $\varphi(t+si)$ die reelle Periode 2ω hat:

$$\frac{dS}{ds} = 0 \quad \text{oder} \quad S = C_v$$

d.h. es ist S , so lange s in den angegebenen Grenzen liegt, unabhängig von s , also eine Constante, mithin ist:

$$2\omega A_v = C_v e^{\frac{v+ic\pi i}{\omega}}$$

$$\varphi(t+ic) = \sum_{v=-\infty}^{+\infty} \frac{C_v}{2\omega} e^{\frac{v(t+ic)\pi i}{\omega}}$$

Ist also $\varphi(u)$ eine reell periodische, innerhalb eines gewissen Parallelsstreifens eindeutig definierte analytische Function, so gilt die für reelle Werthe von u geltende Fouriersche Entwicklung auch noch für alle innerhalb jenes Parallelsstreifens gelegenen complexen Werthe von u .

Gehen wir jetzt zur Function $\varphi(u)$ zurück, so haben wir zunächst den Gültigkeitsbereich einer Fourierschen Entwicklung festzustellen. Da $\varphi(u)$ für reelle Werthe von u nicht unendlich werden soll, so darf keines der b einer reellen GröÙe congruent sein. Man kann dann $\varphi(u)$ stets auf eine andere Function reduzieren, in welcher der imaginäre Theil sämtlicher b zwischen 0 u. $2\omega'$ liegt, diese Grenzen aber ausgeschlossen. Man kann nämlich b_λ darstellen in der Form:

$$b_\lambda = 2\xi_\lambda \omega + 2\xi'_\lambda \omega';$$

bedeutet also ξ'_λ die größte im ξ_λ enthaltene ganze Zahl, so ist:

$$b_\lambda = 2\xi_\lambda \omega + 2v'_\lambda \omega' + 2\xi''_\lambda \omega', \quad \text{wo}$$

$$0 < \xi''_\lambda < 1$$

Setzen wir also:

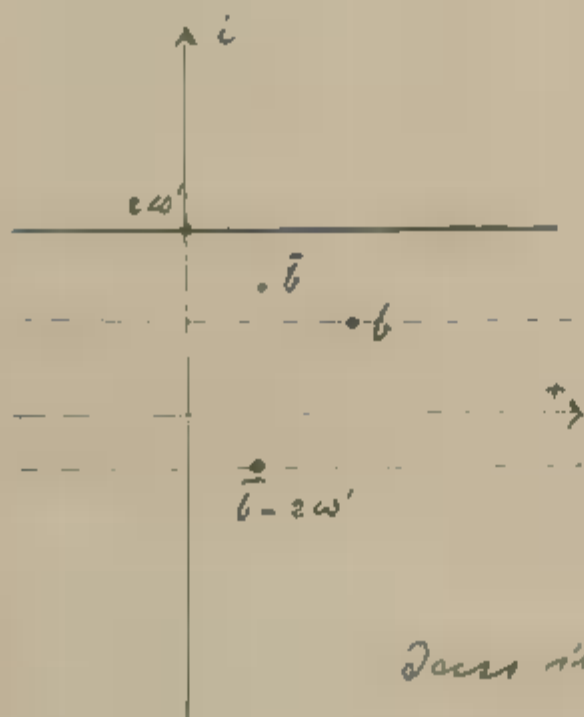
$$b_\lambda = b'_\lambda + 2v'_\lambda \omega',$$

so ist b'_λ eine GröÙe, deren imaginärer Theil zwischen 0 u. $2\omega'$ liegt. In ähnlicher Weise kann man auch $\alpha_\lambda = \alpha'_\lambda + 2v'_\lambda \omega'$ setzen, wo aber α'_λ nicht der Bedingung unterliegt, dass ihr imaginärer Theil kleiner als $2\omega'$ sei. Indem wir diese Substitutionen in $\varphi(u)$ ein-

führen, erhalten wir:

$$\varphi(u) = \frac{\zeta(u - \alpha'_1) \zeta(u - \alpha'_2) \dots \zeta(u - \alpha'_n)}{\zeta(u - b'_1) \zeta(u - b'_2) \dots \zeta(u - b'_r)} \cdot e^{\frac{\gamma \zeta(2n)}{2n} + \gamma' + 2\gamma' \sum_{j=1}^n (\alpha_j - b_j)}$$

$$= \bar{\varphi}(u)$$



Es ist daher $\bar{\varphi}(u)$ eine Funktion von genau derselben analytischen Beschaffenheit wie $\varphi(u)$ und unterscheidet sich von letzterer nur durch einen konstanten Faktor. Wir wollen demnach annehmen, dass in unserer ursprünglichen Funktion $\varphi(u)$ die b bereits so beschaffen sind,

dass ihr imaginärer Theil kleiner als $2\omega'$ ist. Dann

wird es unter diesen ein b gegeben, es werde b genannt, welches der reellen Achse am nächsten liegt. Legen wir durch diesen Punkt b eine Parallele zur reellen Achse, so wird $\varphi(u)$ innerhalb dieses Parallelstreifens nirgends unendlich groß werden. Dasselbe gilt aber auch für den Parallelstreifen, welcher von der reellen Achse u. der durch den Punkt $\bar{b} - 2\omega'$ zu ihr gezogenen Parallelen begrenzt wird, wenn \bar{b} diejenige unter den b bedeutet, welches am weitesten von der reellen Achse entfernt liegt. Hithin kann nach den vorausgeschickten allgemeinen Bemerkungen unsere Funktion $\varphi(u)$ für alle komplexen Werten von u innerhalb des Parallelstreifens $(b \dots \bar{b} - 2\omega')$ in eine Fouriersche Reihe entwickelt werden. Die Bestimmung der Coefficienten dieser Entwicklung aber würde auf gewöhnlichem Wege wohl ~~unaus-~~führbar sein, man kann indessen auf andre sehr elegante u. bequeme Weise zum Ziele gelangen. Dies geschieht dadurch, dass wir das Gebiet der Entwickelbarkeit der Funktion $\varphi(u)$ erweitern. Angenommen nämlich, es existire eine Funktion $\chi(u)$ mit derselben reellen Periode 2ω , welche nur an den Stellen b, b_2, \dots, b_r inner-

halb des Parallelstreifens $(0 \dots + 2\omega')$ - den im Bering aufzu
 diesen kongruenten Stellen unendlich wird u. zwar so, dass die
 Differenz $\varphi(u) - \chi(u)$ an diesen Stellen einen endlichen Wert be-
 sitzt, dann wird die Differenz $\varphi(u) - \chi(u)$, wenn man von der
 rechten Seite aus nach oben u. unten hin fortschreitet, zum
 ersten Male wieder unendlich werden aus den Stellen $b + 2\omega'$ u.
 $\bar{b} - 2\omega'$ u. es wird sich daher die Differenz $\varphi(u) - \chi(u)$ innerhalb des
 Parallelstreifens $(\bar{b} - 2\omega' \dots b + 2\omega')$ in eine Fouriersche Reihe ent-
 wickeln lassen. Eine solche Funktion $\chi(u)$ existiert nun in der
 That u. ist leicht anzustellen, wir wollen daher, jedoch die (unwe-
 sentliche, nicht beschränkende, aber zumal sehr bequeme) Voraus-
 setzung machen, dass keine zwei der b einander kongruent sind.
 Setzt man dann $u = b_1 + \kappa$, so ist nach Potenzen von κ entwickelt:

$$\varphi(b_1 + \kappa) = B_1 \kappa^{-1} + \bar{P}(\kappa) \quad , \quad \text{wovon:}$$

$$4) \quad B_1 = \frac{\zeta(b_1 - \alpha_1) \dots \zeta(b_1 - \alpha_r)}{\zeta(b_1 - b_1) \dots \zeta(b_1 - b_r)} e^{g'} \quad , \quad \text{ferner:}$$

$$\varphi(b_1 + 2\tilde{\omega} + \kappa) = B_1 e^{\frac{1}{2} \frac{\pi i c}{\tilde{\omega}}} \kappa^{-1} + \bar{P}(\kappa) \quad , \quad \tilde{\omega} = \nu\omega + \nu'\omega'$$

Setzt man nun:

$$5) \quad \varphi_1(u) = B_1 \frac{\pi}{2\tilde{\omega}} \operatorname{ctg} \left(\frac{\pi}{2\tilde{\omega}} (u - b_1) \right)$$

so ist:

$$\varphi_1(u + 2\mu\omega) = \varphi_1(u)$$

u. die Funktion φ_1 wird unendlich nur an der Stelle b_1 u. den
 im Bering auf ω dieser kongruenten Stellen. Da nun, wenn man
 an die Stelle von u $b_1 + \kappa$ setzt, ihre Entwicklung nach Potenzen
 von κ die folgende ist:

$$\varphi_1(b_1 + \kappa) = B_1 \kappa^{-1} + \dots$$

$$\varphi_1(b_1 + 2\mu\omega + \kappa) = B_1 \kappa^{-1} + \dots$$

so geht hieraus hervor, dass die Differenz $\varphi(u) - \varphi_1(u)$ an den

162 Stellen $u = b_1 + z u$ nicht mehr unendlich groß wird. Setzt man also

$$\varphi(u) = \sum_{\lambda=1}^r \varphi_{\lambda}(u)$$

so wird die Differenz:

$$\varphi(u) - \sum_{\lambda=1}^r \varphi_{\lambda}(u)$$

an den Stellen b_1, b_2, \dots, b_r u. den ihnen im Bezug auf ω kongruenten nicht mehr unendlich groß werden. Es wird mithin diese Differenz innerhalb des Parallelstreifens $(\bar{b} - z\omega' \dots b + z\omega')$ nicht mehr unendlich groß. Kann daher für alle in ihm gelegenen Werthe von u in eine Fouriers'sche Reihe entwickelt werden von der Form:

$$6) \quad \varphi(u) - \sum_{\lambda=1}^r \varphi_{\lambda}(u) = \sum_{v=-\infty}^{+\infty} A'_v e^{\frac{v\pi i u}{\omega}}$$

Beschränken wir jetzt u wieder auf den ursprünglichen Parallelstreifen $(\bar{b} - z\omega' \dots b)$, so kann man in vorstehender Gleichung $z\omega' + u$ statt u setzen = es wird:

$$7) \quad \varphi(u + z\omega') - \sum_{\lambda=1}^r \varphi_{\lambda}(u + z\omega') = \sum_{v=-\infty}^{+\infty} A'_v e^{\frac{v\pi i}{\omega}(u + z\omega')} \quad \text{oder:}$$

$$7) \quad e^{\frac{\pi i c}{\omega}} \varphi(u) - \sum_{\lambda=1}^r \varphi_{\lambda}(u + z\omega') = \sum_{v=-\infty}^{+\infty} A'_v e^{\frac{v\pi i}{\omega}(u + z\omega')}$$

mithin aus (6) - (7):

$$8) \quad \sum_{\lambda=1}^r \varphi_{\lambda}(u + z\omega') - e^{\frac{\pi i c}{\omega}} \sum_{\lambda=1}^r \varphi_{\lambda}(u) = \sum_{v=-\infty}^{+\infty} A'_v (e^{\frac{\pi i c}{\omega}} - e^{\frac{v\pi i z\omega'}{\omega}}) e^{\frac{v\pi i u}{\omega}}$$

Diese Formel gilt für alle Werthe von u , welche innerhalb des ursprünglichen Parallelstreifens $(\bar{b} - z\omega' \dots b)$ gelegen sind. Setzt also:

$$9) \quad u = zt\omega + zt'\omega', \quad b = z\beta\omega + z\beta'\omega', \quad \text{so muß sein:}$$

$$0 < \beta' < 1, \quad t' - \beta' < 0, \quad t' + 1 - \beta' > 0.$$

Setzen wir noch zur Abkürzung:

$$10) \quad e^{\frac{\pi i c}{\omega}} = l, \quad e^{\frac{\pi i z\omega'}{\omega}} = h, \quad e^{\frac{v\pi i z\omega'}{\omega}} = z^v$$

so geht unsere Formel in folgende über:

$$11) \quad \sum_{\lambda=1}^r \varphi_{\lambda}(u + z\omega') - l \sum_{\lambda=1}^r \varphi_{\lambda}(u) = \sum_{v=-\infty}^{+\infty} A'_v (l - h^{zv}) z^{zv}$$

Hierdurch werden nun die Coefficienten A'_v ausgedrückt durch

Die Coefficienten der Entwicklungen von bekannten Functionen. 163

nen. Nun ist:

$$\begin{aligned} \operatorname{ctg} x &= i \frac{e^{+2xi} + 1}{e^{+2xi} - 1} = i - \frac{2i}{1 - e^{2xi}} = i - 2i \sum_{n=0}^{\infty} e^{2nxi} \\ &= -i + \frac{2i}{1 - e^{-2xi}} = -i + 2i \sum_{n=0}^{\infty} e^{-2nxi} \end{aligned}$$

Dabei gilt die erste oder zweite Entwicklung, je nachdem die zweite Coordinante von x positiv oder negativ ist. Nun ist aber in

$$\varphi_1(u) = B_1 \frac{\pi}{2\omega} \operatorname{ctg} \frac{(u - b_1)\pi}{2\omega}$$

die zweite Coordinante von $\frac{(u - b_1)\pi}{2\omega}$ negativ, da $t' - \beta'_1 < t - \beta < 0$ ist, mithin ist dabei die 2. Art der Entwicklung anzuwenden. Dagegen ist in $\varphi_1(u + 2\omega')$ die zweite Coordinante positiv, da ja $t' + 1 - \beta'_1 > 0$ ist, für diese Functionen gilt daher die erste Art der Entwicklung. Folglich erhalten wir:

$$\varphi_1(u) = -B_1 \frac{\pi i}{2\omega} + B_1 \frac{\pi i}{\omega} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\frac{n(u - b_1)\pi i}{\omega}}$$

$$\varphi_1(u + 2\omega') = B_1 \frac{\pi i}{2\omega} - B_1 \frac{\pi i}{\omega} \sum_{n=0}^{\infty} e^{\frac{n(u + 2\omega' - b_1)\pi i}{\omega}}$$

oder, wenn wir z n. h. einführen u. das Glied der Reihe für $n=0$ mit der Constanten vereinigen:

$$\varphi_1(u) = B_1 \frac{\pi i}{2\omega} + B_1 \frac{\pi i}{\omega} \sum_{n=1}^{\infty} e^{\frac{nb_1\pi i}{\omega}} \cdot z^{-2n}$$

12,

$$\varphi_1(u + 2\omega') = -B_1 \frac{\pi i}{2\omega} - B_1 \frac{\pi i}{\omega} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{nb_1\pi i}{\omega}} \cdot h^{2n} z^{2n}$$

Setzen wir nun dies in unsere Formel (II) ein u. bedienen wir uns dabei der Abkürzungen:

$$C_0 = \frac{\pi}{2\omega} \sum_{\lambda=1}^r B_\lambda$$

$$13, \quad C_n = \frac{\pi}{2\omega} \sum_{\lambda=1}^r B_\lambda e^{-\frac{nb_\lambda\pi i}{\omega}}$$

erhalten wir:

$$-(1+b)C_0 i - 2i \sum_{n=1}^{\infty} C_{+n} h^{2n} z^{2n} - 2i \sum_{n=1}^{\infty} C_{-n} z^{-2n} = \sum_{v=-\infty}^{+\infty} A'_v (1 - h^{2v}) z^{2v}$$

Setzen wir daher die Coefficienten beiderseits gleich, so wird:

$$A'_0(l-1) = -(1+l)C_0 i$$

$$A'_{+n}(l-h^{+2n}) = -2i C_n h^{2n}$$

$$A'_{-n}(l-h^{-2n}) = -2i C_{-n} \quad \text{oder:}$$

$$14, \quad A'_0 = \frac{1+l}{1-l} C_0 i ;$$

$$A'_{+n} = \frac{2i h^{2n}}{h^{2n}-l} C_n$$

$$A'_{-n} = \frac{2il}{h^{-2n}-l} C_{-n}$$

Setzt man ferner:

$$\varphi(u) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_n z^{2n}$$

so ist wegen Formel (6):

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_n z^{2n} = i C_0 + 2i \sum_{n=1}^{\infty} C_{-n} z^{-2n} + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A'_n z^{2n}$$

u. daher:

$$A_0 = i C_0 + A'_0$$

$$A_{+n} = A'_{+n}$$

$$A_{-n} = 2i C_{-n} + A'_{-n}$$

u. daraus:

$$A_0 = \frac{2i}{1-l} C_0$$

$$15, \quad A_{+n} = \frac{2i h^{2n}}{h^{2n}-l} C_{+n}$$

$$A_{-n} = \frac{2i h^{-2n}}{h^{-2n}-l} C_{-n}$$

Man kann daher für jeden beliebigen Wert von n diese drei Formeln in die eine zusammenfassen:

$$16, \quad A_n = \frac{2i h^{2n}}{h^{2n}-l} C_n$$

u. es folgt schließlich für $\varphi(u)$ die Entwicklung:

$$17, \quad \varphi(u) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{2i h^{2n} C_n}{h^{2n}-l} e^{\frac{n u \pi i}{\omega}}$$

worin

$$C_n = \frac{\pi}{2\omega} \sum_{\lambda=1}^r B_{\lambda} e^{-\frac{n b_{\lambda} \pi i}{\omega}}$$

und

$$B_{\lambda} = [\varphi(b_{\lambda} + \kappa)]_{K-1}$$

ist.

Wm. S. S. S.

Nov. 3^{te} 58.

Punkte des Seminars.

- 1 Die älteren Stud. können eigene Arbeit zum Vortrag bringen.
- 2 Die Bibliothek soll erweitert zu werden mit der nöth. Literatur Dazu eine reichl. Sammlung der wichtigsten Werke & Journale.
- 3 Vorträge von den Prof. über besondere Gegenst.
- 4 Stud. können über Fragen in Lösung bringen.
- 5 Wird die Zahl der St. zu gross werden so in 2 Klassen & mehr Abtheilungen getheilt.

Lehrbuch der Mechanik des Himmels.

Wir nehmen ein System materieller Punkte,
welche keinem anderen Gesetze unterworfen sind
als der gegenseitigen Anziehung nach dem Newton'schen
Gesetze d. h.
$$-\frac{m m'}{r^2}$$

Die allgemeine Aufgabe die Coord. eines Punktes
als F. der Zeit auszudrücken, ist nicht lösbar.

Die Data sind die Massen der H. und deren Richtungen
und Geschwindigkeiten in einem Momente,
daraus

sucht man die Coord. für irgend eine andere
Zeit. Bisher ist dies nur für 2 Punkte gelöst
worden. Einige Ansätze aber begünstigen
eine angenäherte Bestimmung der Coord. in
unserem Sonnen-Systeme, und die über
ausgewählte Punkte der Sonne der näheren
bestimmte Charakter der Bewegung, und deren
geringe Abweichung voneinander. Über diese
bisher geliebte Art der Annäherung aber sind
die Ansichten verschieden, insbesondere irr-
zieht die öff. Meinung darüber den Astronomen
zu Gunsten. Nur die Stabilität des Sonnen-
systems zu begründen, müsste man

zeigen dass die Schwankungen der Planeten
gewissen Grenzen niemals überschreiten, d.h.
dass die Planeten immer zwischen zwei
festen Kugelschichten bleiben, welche die
Sonne zum Mittelpst. besitzen. Man kann
zwei Beweise das die Erst. stetige "unver-
änderliche Zeit" sind, dass sie darnach entwickeln
lassen nach dem Taylors Lehrsatz in der
Form $f(t) = f(t_0) + f'(t_0)(t-t_0) + \dots$

wobei der Ausdruck nach dem eine Bedeutung
besitzt wenn man dem t complexen Werte bei-
legt. Nach Fouriers Theorem lässt sich
die Cord darstellen in eine Reihe (Fourier'sche Reihe)
deren allgemeiner Glied

$$A_n \cos \frac{2n\pi}{\omega} t + B_n \sin \frac{2n\pi}{\omega} t$$

ist.
Die Convergenz einer solchen Reihe ist gewöhnlich
und es bedarf daher keiner besonderen Bemerkung
wenn die Glieder nach n convergen. Man
kann zeigen dass $f(t)$ convergirt so dass $f(t)$ stetig
ist. Man kann auch zeigen dass die Reihe
für reelle, und auch für complexen Werte
des t convergirt, so dass

$$f(t + \omega) = f(t)$$

so convergirt die Reihe stärker als eine geometrische.
Man kann auch die Reihe in Exponentialform, z.B.

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{2\pi i n t / \omega}$$

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{\frac{2n\pi i}{\omega} t}$$

wo $C = \text{compf. H}$ und $C_{-n} \text{ conjug. ist mit } C_n$
 Man kann annehmen dass C eine Funktion ist
 einer reellen compf. Warte von $t = n\omega$
 so dass wir können setzen, Pöngers Buch.

$$f(n\omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{\frac{2n\pi i}{\omega} n\omega} = c_n$$

$$-S < n < +S$$

+	S
-	S

Für n und m sind $e^{\frac{2n\pi i}{\omega} t} = e^{\frac{2m\pi i}{\omega} t}$

Allgemein. Dngl. der Störungsprobleme.

I Zwei Körper.

mögen sich um ihren Schwerpunkt bewegen, so
zerlegt man von einem festen Punkte aus
einen Strahl in der Richtung des einen Körpers
und dessen Geschw. projiziert. Das neue Ende
des Str. beschreibt immer eine ganz Curve,
und zwar in diesem Falle einen Kreis.

Die centr. Kraft ist \propto $\frac{m_1 m_2}{r^3}$ und Masse dist.
t durch die Entfernung r .

$$\frac{d^2 x_0}{dt^2} = - \frac{m_1 (x_1 - x_0)}{r_{01}^3}$$

$$\frac{d^2 x_1}{dt^2} = - \frac{m_0 (x_0 - x_1)}{r_{10}^3}$$

Die Masse des Schwerpunktes ist $\bar{x} = \frac{m_0 x_0 + m_1 x_1}{m_0 + m_1}$

$$\frac{d^2 \bar{x}}{dt^2} = 0$$

Der Schwerpunkt hat keine Beschleunigung.

$$\frac{d^2 (x_1 - x_0)}{dt^2} = - \frac{(m_0 + m_1) (x_1 - x_0)}{r_{01}^3}$$

welches die relat. Bewegung angiebt. Setzt
man $x_1 - x_0 = \xi$, so ist

$$\frac{d^2 \xi}{dt^2} = - \frac{(m_0 + m_1) \xi}{r_{01}^3}$$

Um die Bew. um den Schwerp. zu erhalten,

$$x_1 - \bar{x} = x_1 - \frac{m_0 x_0 + m_1 x_1}{m_0 + m_1}$$

$$= \frac{m_0 (x_1 - x_0)}{m_0 + m_1}$$

und die Baryc. um den Schwerpunkt ist

$$\begin{cases} x_1 = \bar{x} + \frac{m_0 \xi}{m_0 + m_1} \\ x_0 = \bar{x} + \frac{m_1 \xi}{m_0 + m_1} \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{da } x_1 - x_0 = \xi. \\ \bar{x} = \frac{m_0 x_0 + m_1 x_1}{m_0 + m_1} \end{array}$$

Schreibt man nun wieder x statt ξ so bekommt

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -\frac{K^1 x}{r^3}, \quad \frac{d^2 y}{dt^2} = -\frac{K^2 y}{r^3}, \quad \frac{d^2 z}{dt^2} = -\frac{K^3 z}{r^3}.$$

Es ist dann $y \frac{d^2 z}{dt^2} - z \frac{d^2 y}{dt^2} = 0$ & " " Man schreibe

$$\text{I} \quad \begin{cases} y \frac{d^2 z}{dt^2} - z \frac{d^2 y}{dt^2} = C_1 \\ z \frac{d^2 x}{dt^2} - x \frac{d^2 z}{dt^2} = C_2 \\ x \frac{d^2 y}{dt^2} - y \frac{d^2 x}{dt^2} = C_3 \end{cases}$$

was die C_i sind:

$$\begin{aligned} \text{Nun ist } d \frac{x}{r} &= \frac{r dx - x dr}{r^2} = \frac{r^2 dx - x(\alpha dx + y dy + z dz)}{r^3} \\ &= \frac{y(y dx - x dy) + z(z dx - x dz)}{r^3} \end{aligned}$$

zur Wiederholung

16/17 St.

$$1 \quad \frac{d^2x}{dt^2} = -K^2 \frac{x}{r^3}, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -K^2 \frac{y}{r^3}, \quad \frac{d^2z}{dt^2} = -K^2 \frac{z}{r^3}$$

$$2 \quad y \frac{dz}{dt} - z \frac{dy}{dt} = C_1 \quad \text{1. Bin. von } \frac{y \frac{dz}{dt} - z \frac{dy}{dt}}{r^2} = 0$$

Prin. III 510 (6)

$$3 \quad C_2 x + C_3 y + C_4 z = 0 \quad \text{2. Bin. von } \frac{C_2 x + C_3 y + C_4 z}{r^2} = 0$$

$$4 \quad C_5 \frac{dy}{dt} + C_6 \frac{dz}{dt} = K^2 x + h_1$$

$$5 \quad C_7 h_1 + C_8 h_2 + C_9 h_3 = 0$$

$$6 \quad K^2 r = C \cdot (C_1^2 + C_2^2 + C_3^2) = -h_1 x - h_2 y - h_3 z$$

- 1 gibt die beschleunigende Kraft an.
- 2 die C_1, C_2, C_3 sind bekannte ^{constante} Werte, welche Lage & Geschw. des Punktes festlegen.
- 3 "die Bewegung geschieht in einer Ebene.
- 4
- 5 Abstand zwischen zwei Punkten ist bekannt, wenn Abstand zwischen drei Punkten bekannt ist.
- 6 "dies ist eine Bedingung.

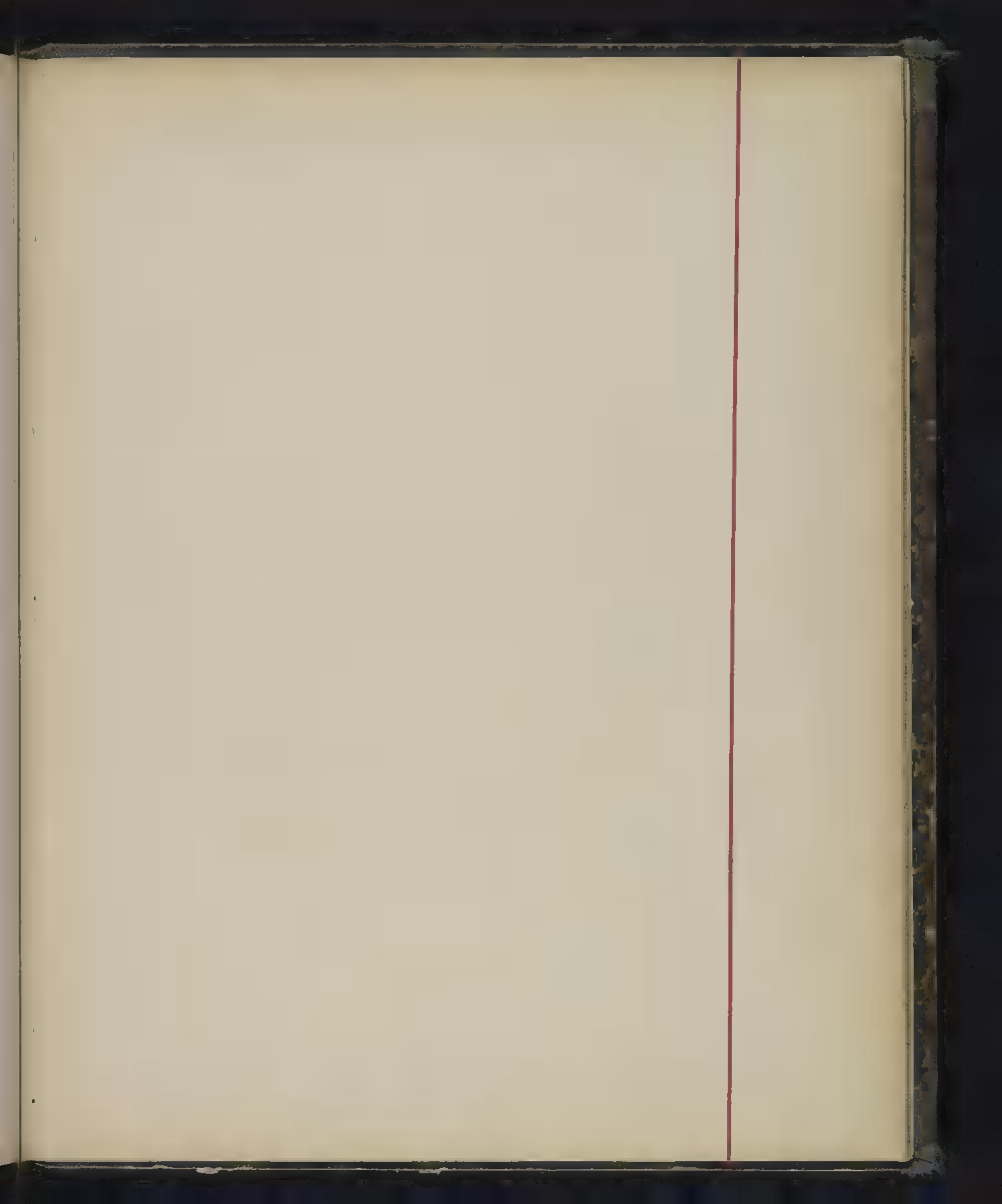
Prier. 510. $x dy - y dx = p \cdot ds$ wo p Perpend. vom Orl auf die Tang. an die Curve. Aus 2, $x dy - y dx = C_2 dt$, wenn aus $\frac{ds}{dt} = v_{loc.} = \frac{C_1}{p}$. Aus $x = r \cos \theta$ $y = r \sin \theta$ hat man, $x dy - y dx = r^2 d\theta = C_2 dt$ $p ds = 2 \Delta$. Oder vielmehr "

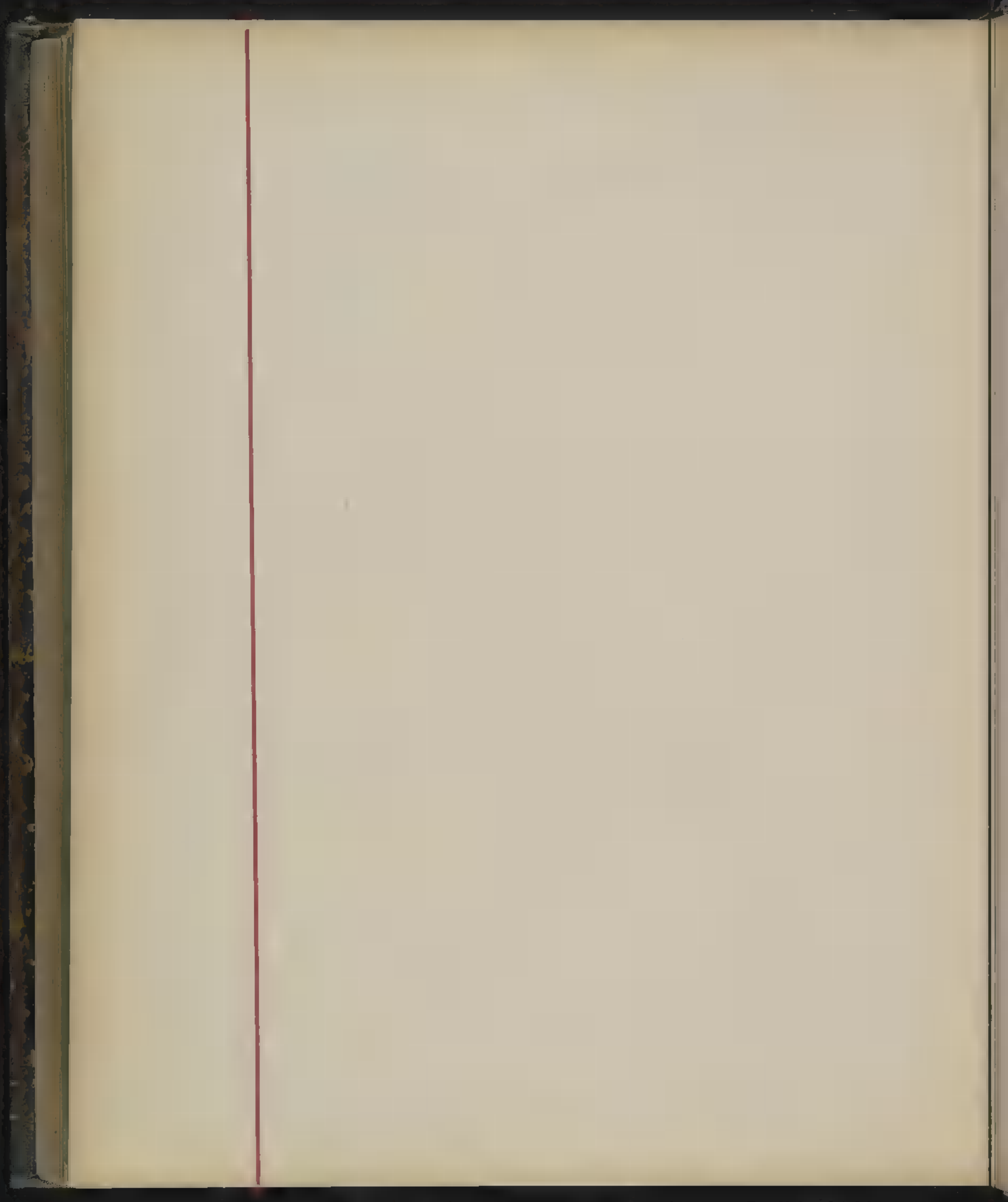
Ans 4 $C_1 \frac{dx}{dt} = C_3 \frac{dx}{dt} + \frac{K^2 y}{r} + h_2$

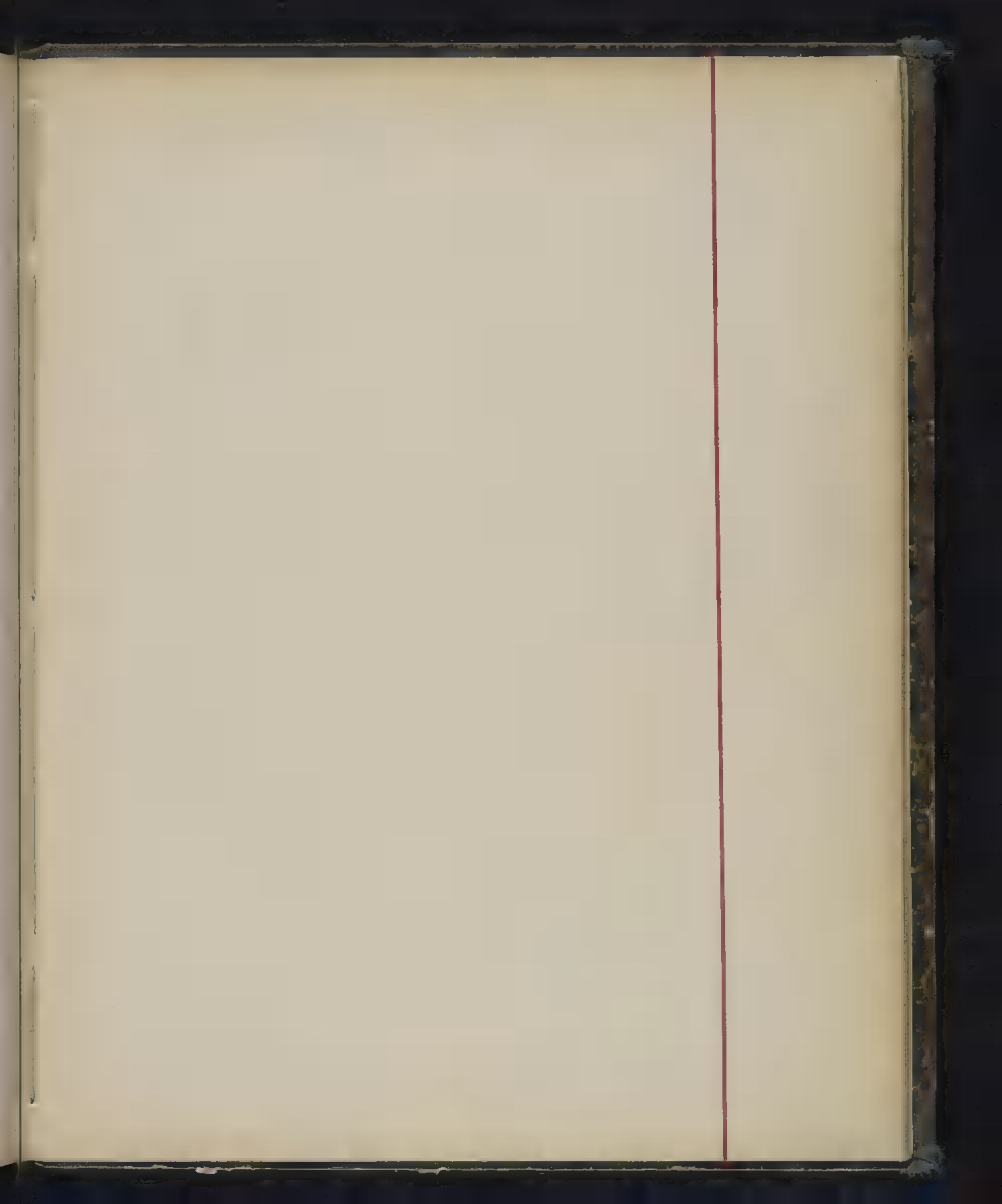
$$C_2 \frac{dx}{dt} = C_1 \frac{dx}{dt} + \frac{K^2 x}{r} + h_2$$

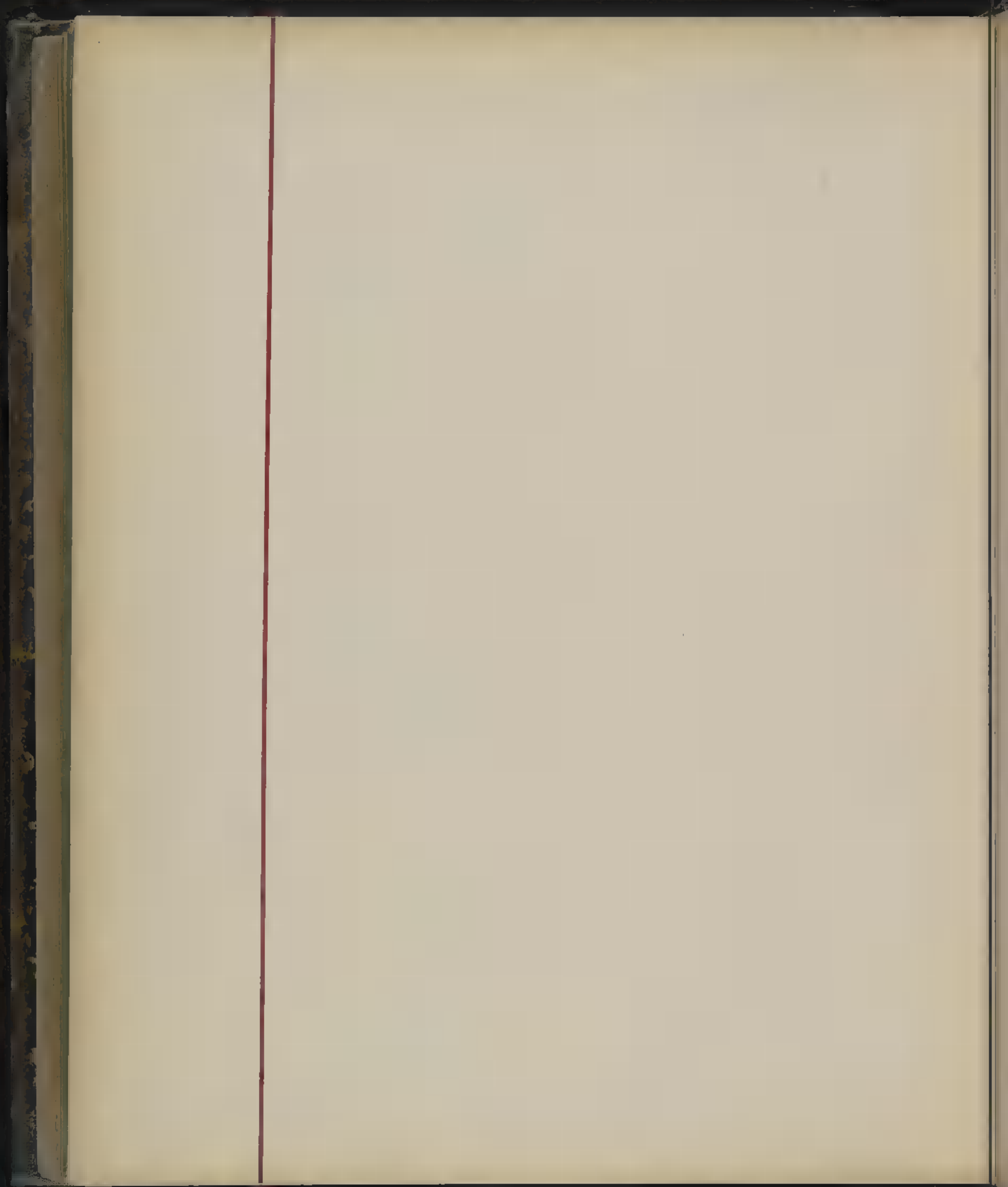
$$C_3 \frac{dy}{dt} = C_2 \frac{dy}{dt} + \frac{K^1 x}{r} + h_3$$

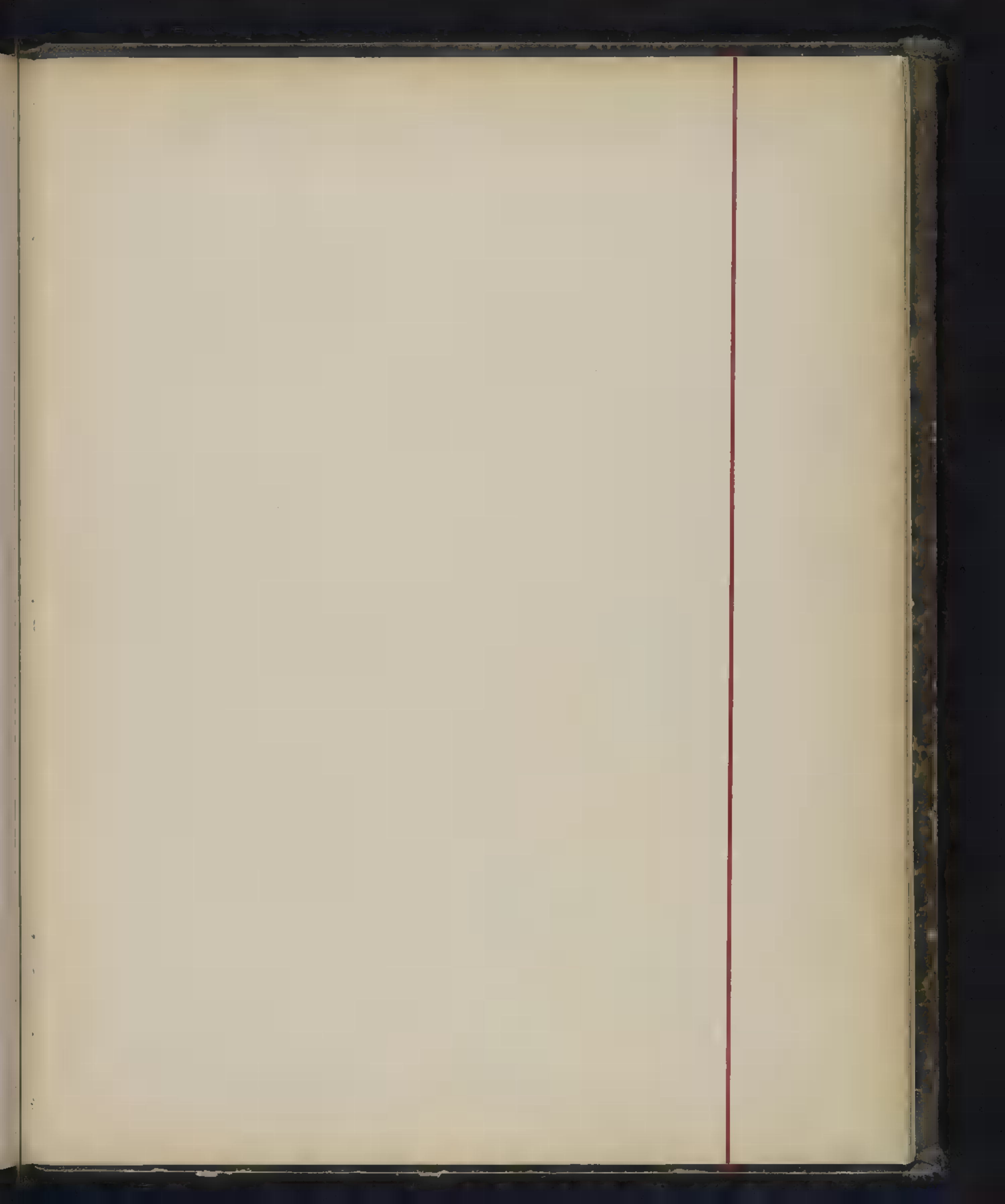
c

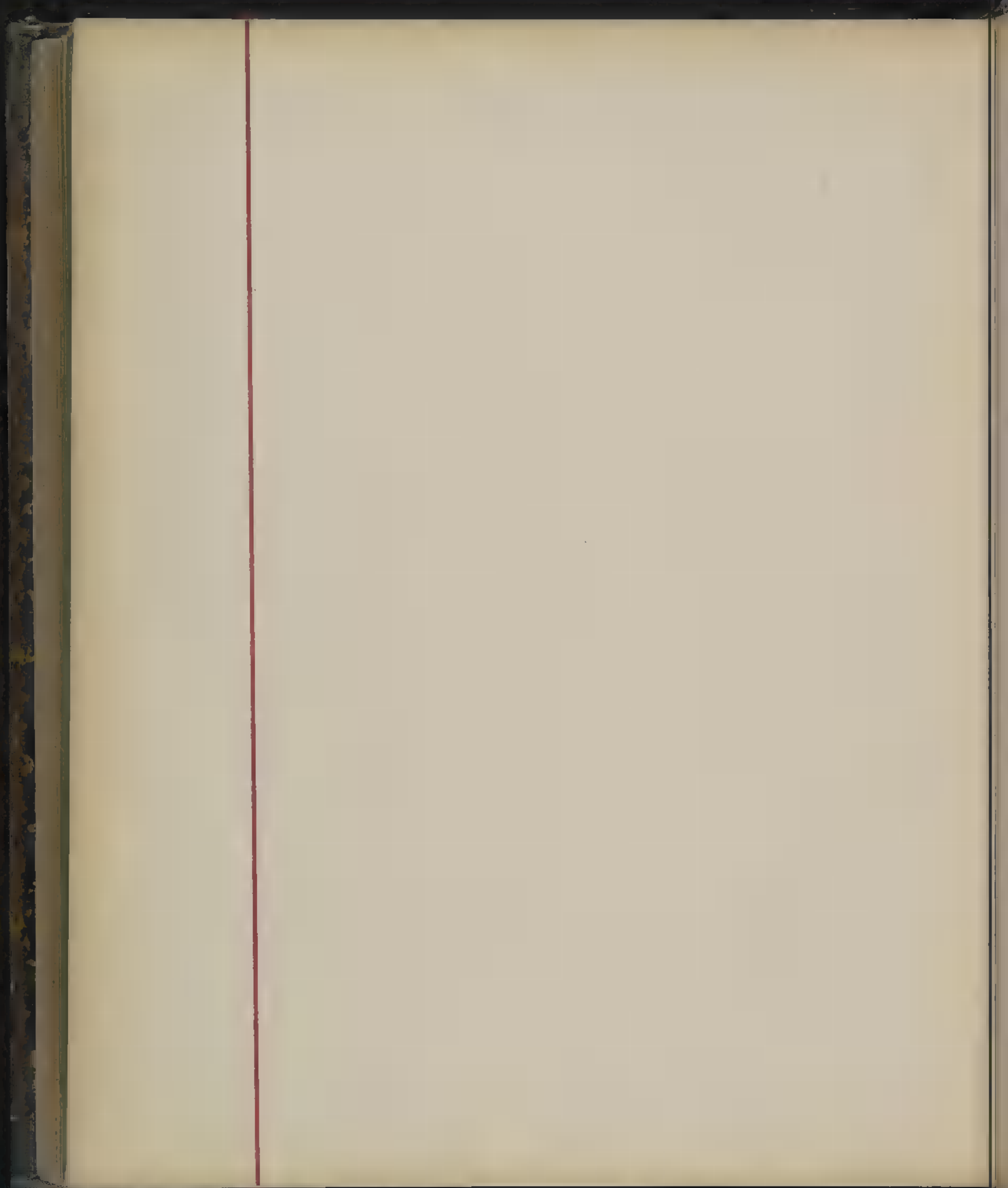


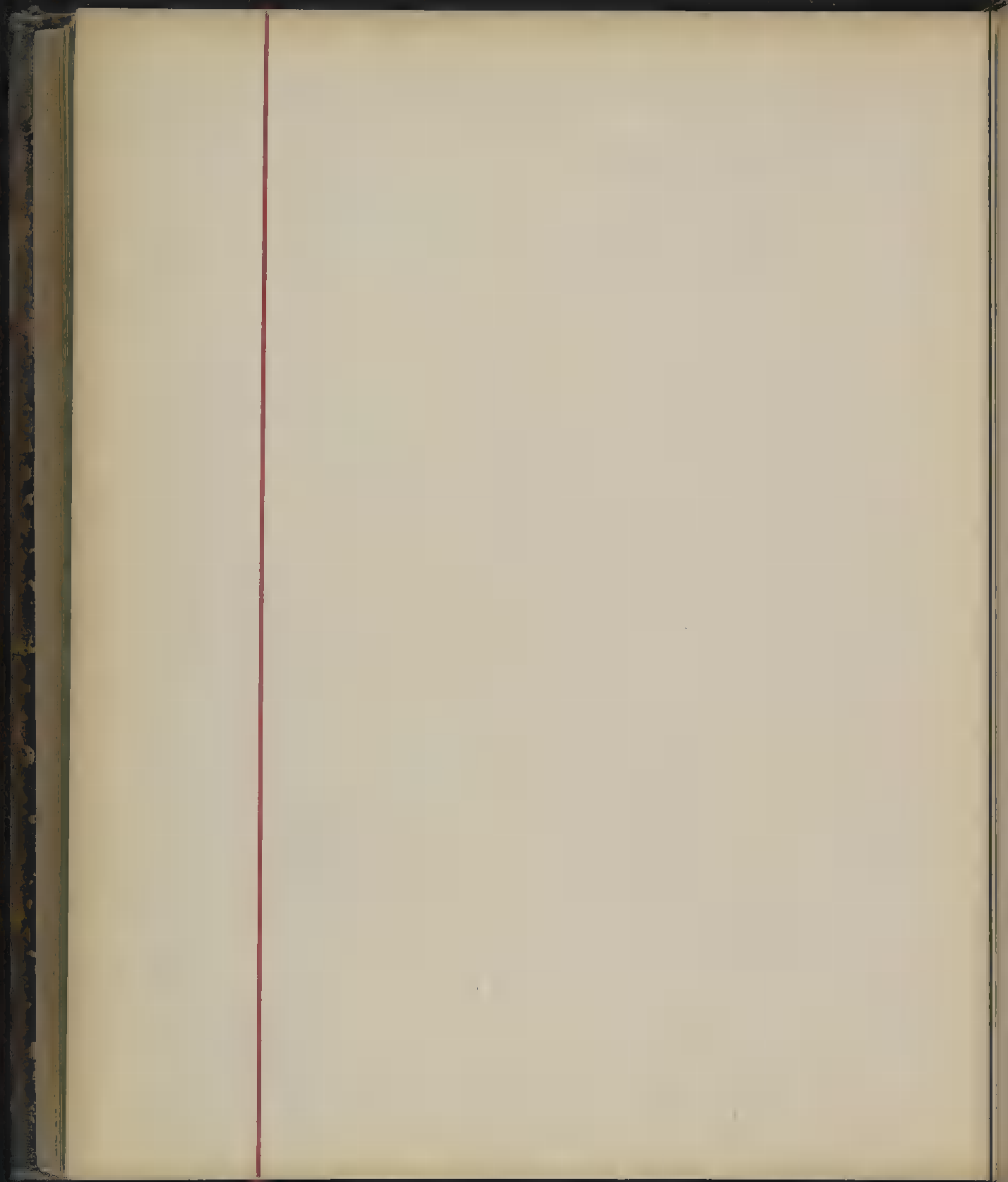


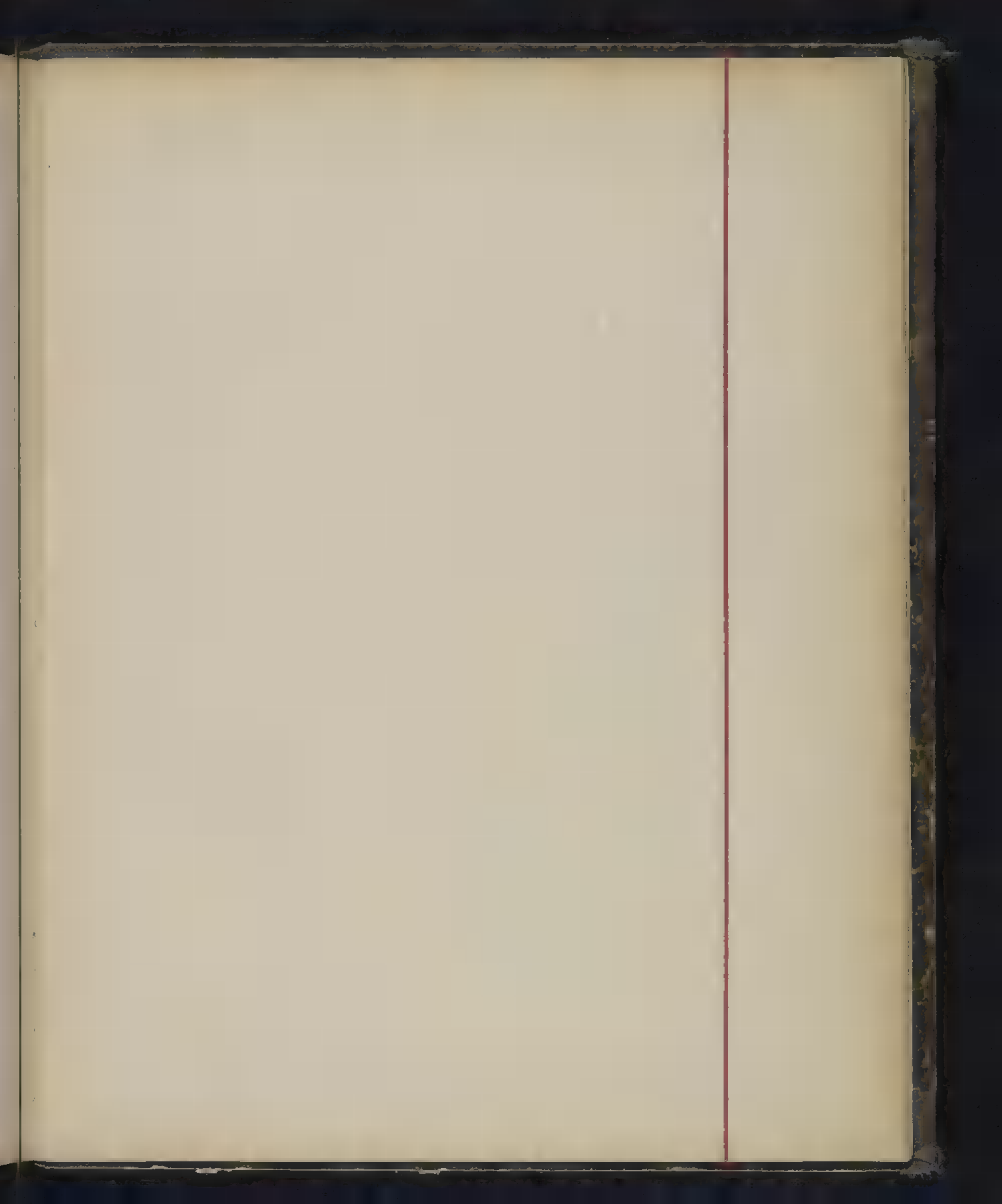


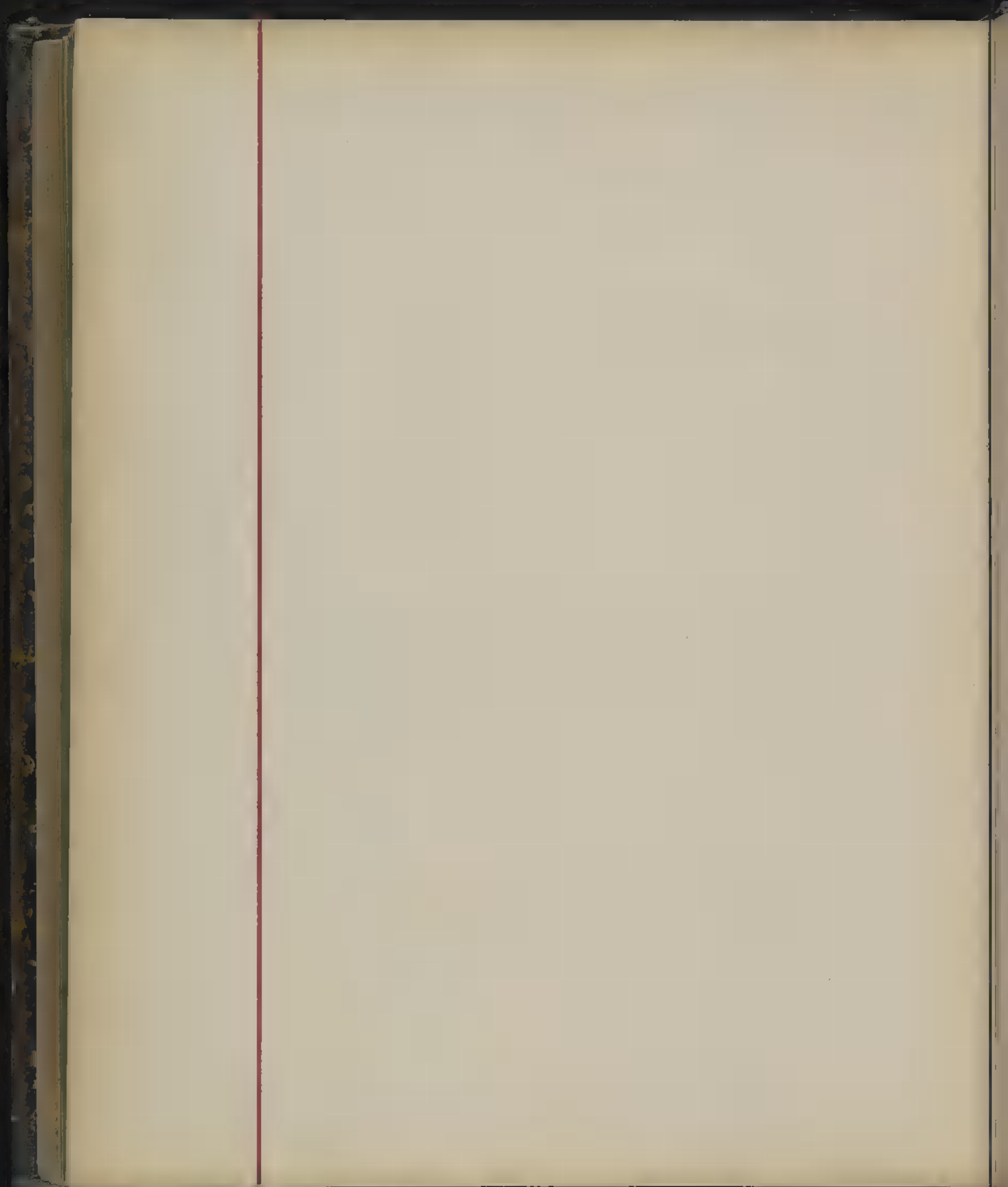


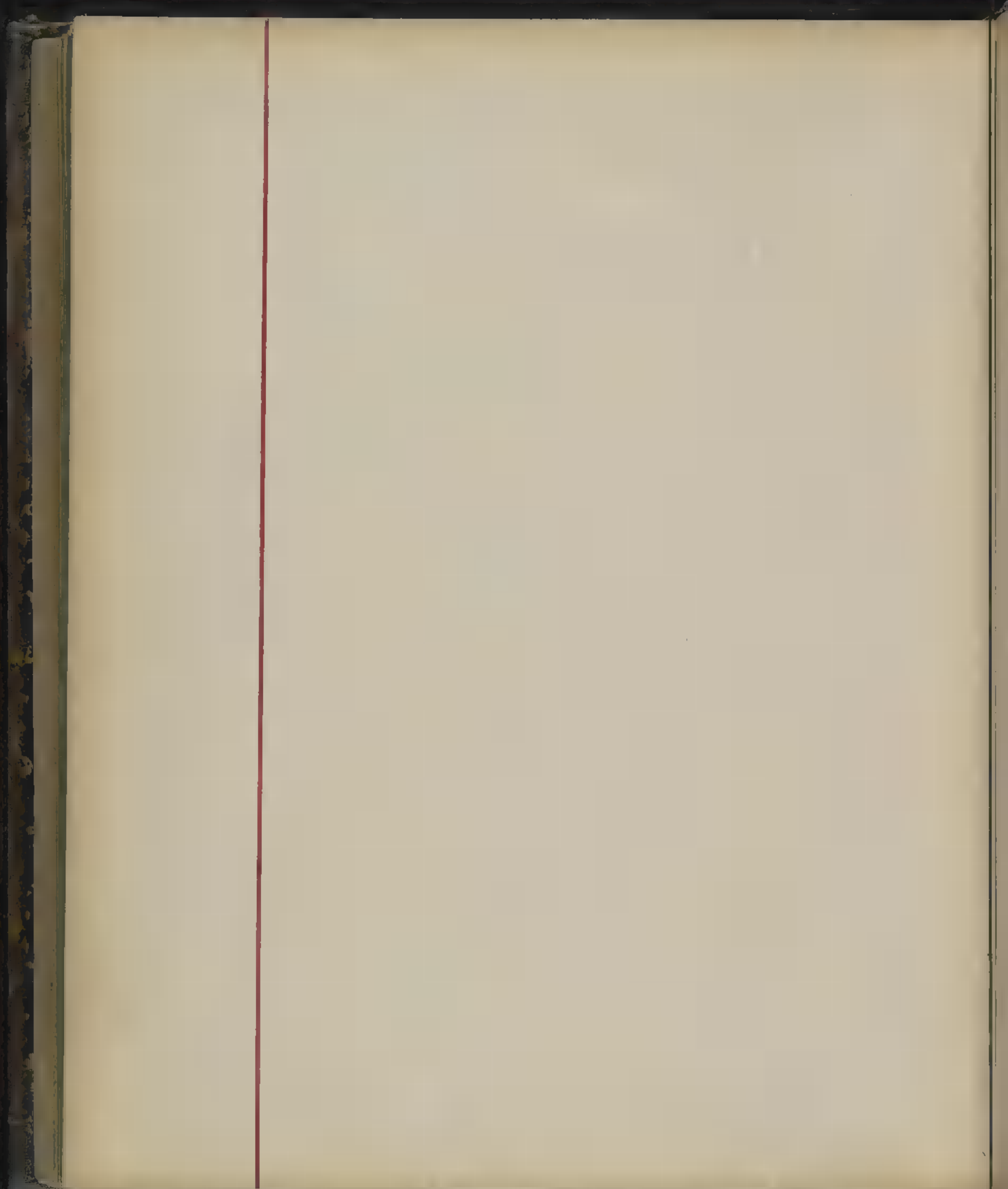


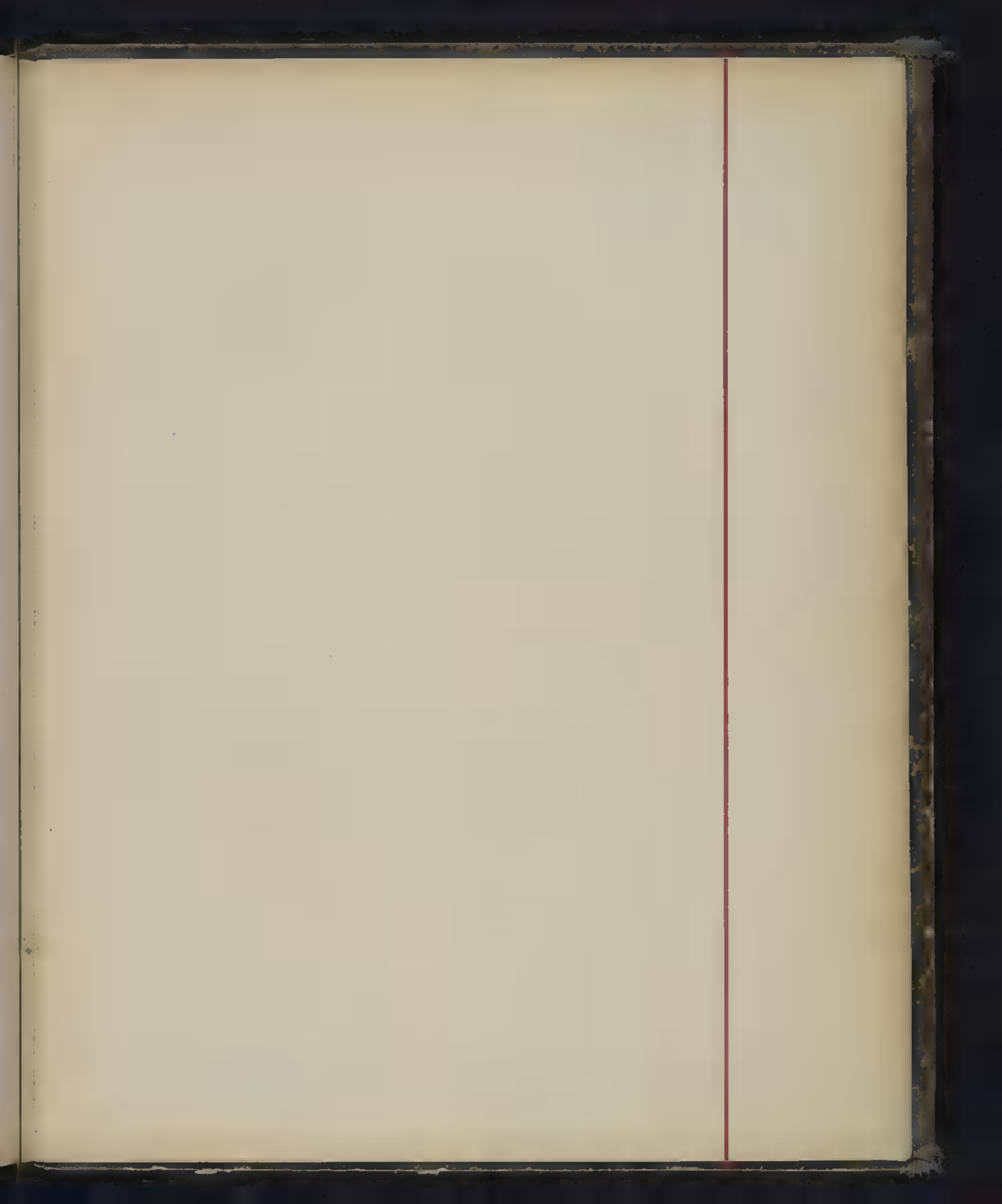


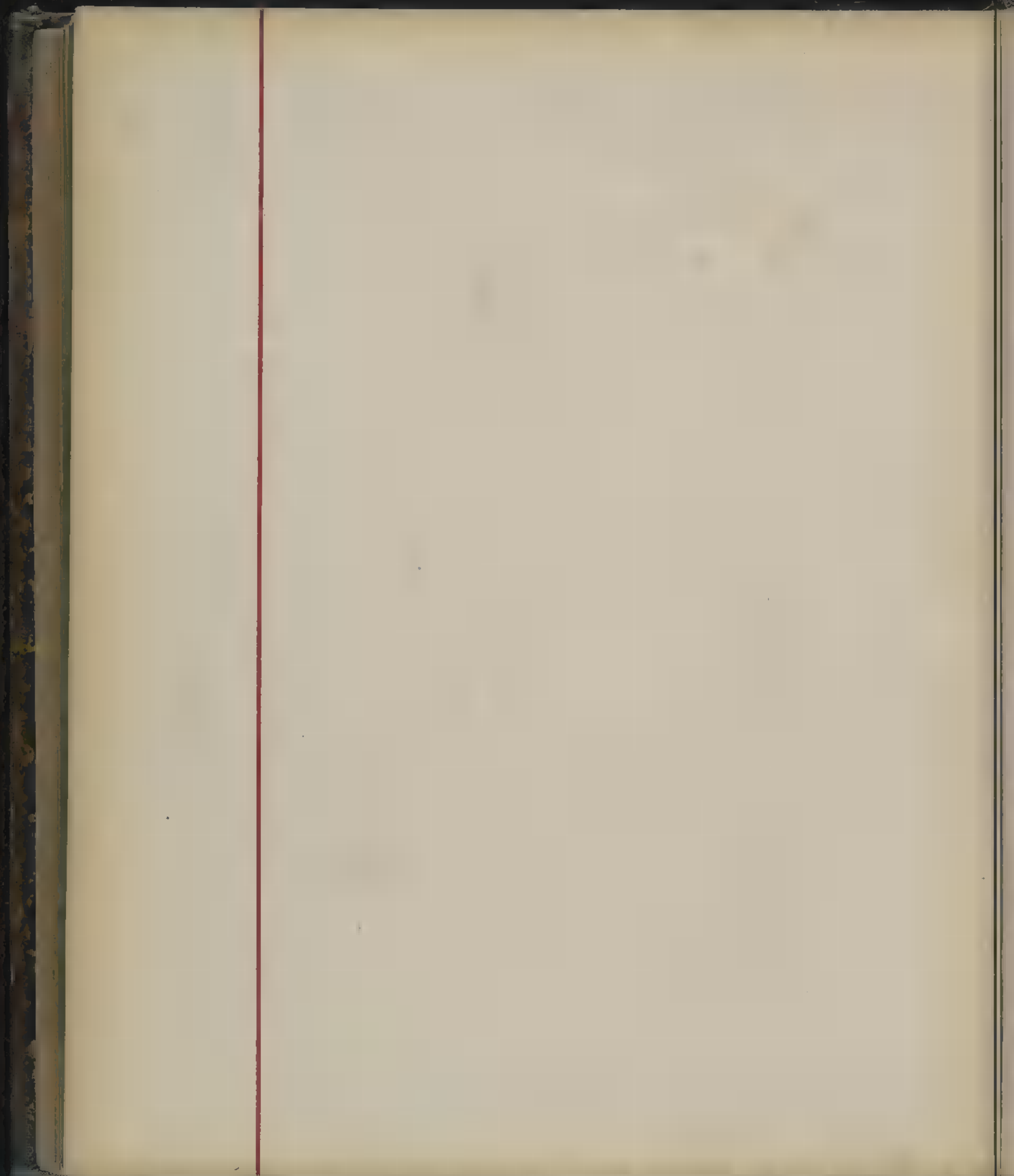


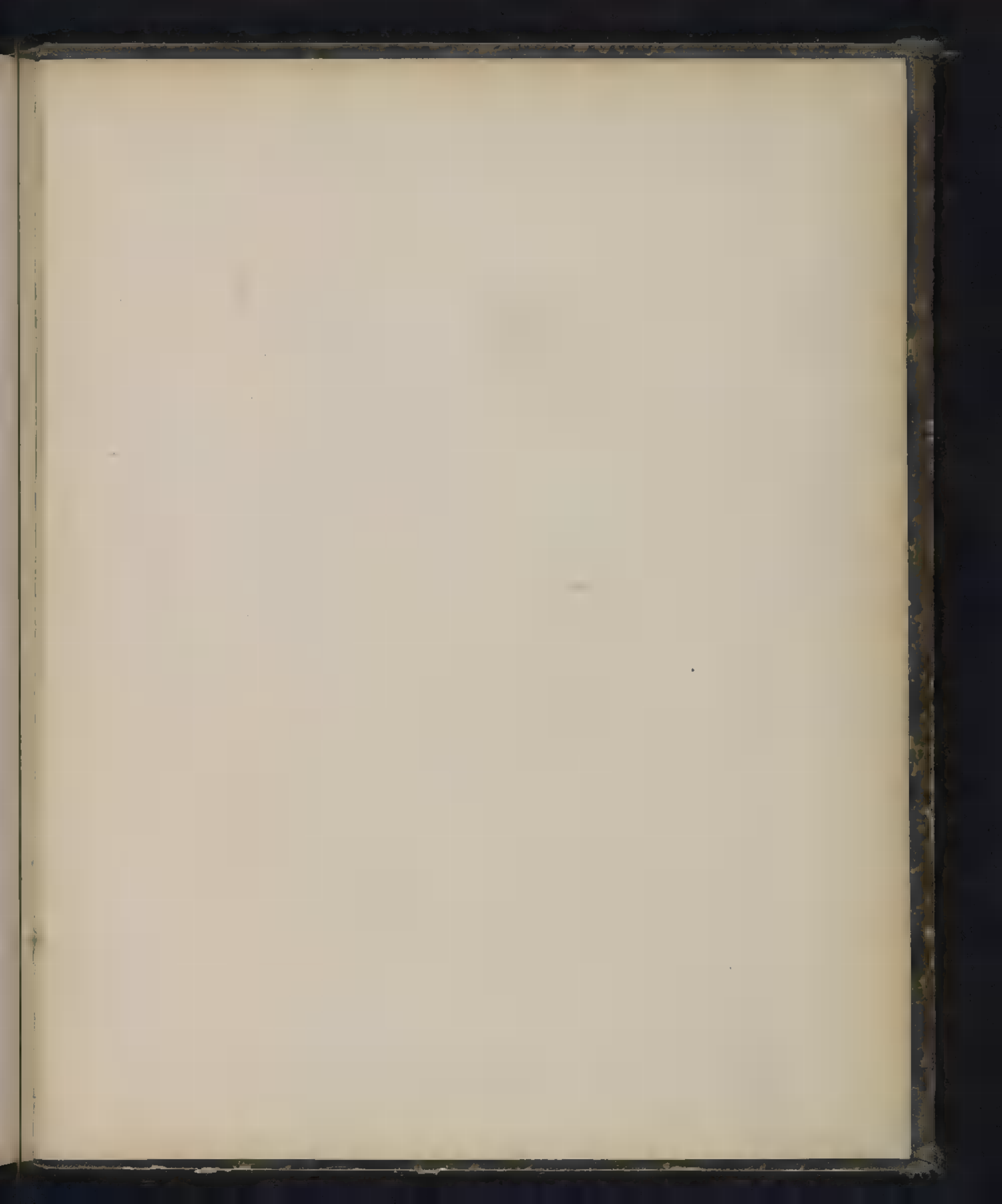


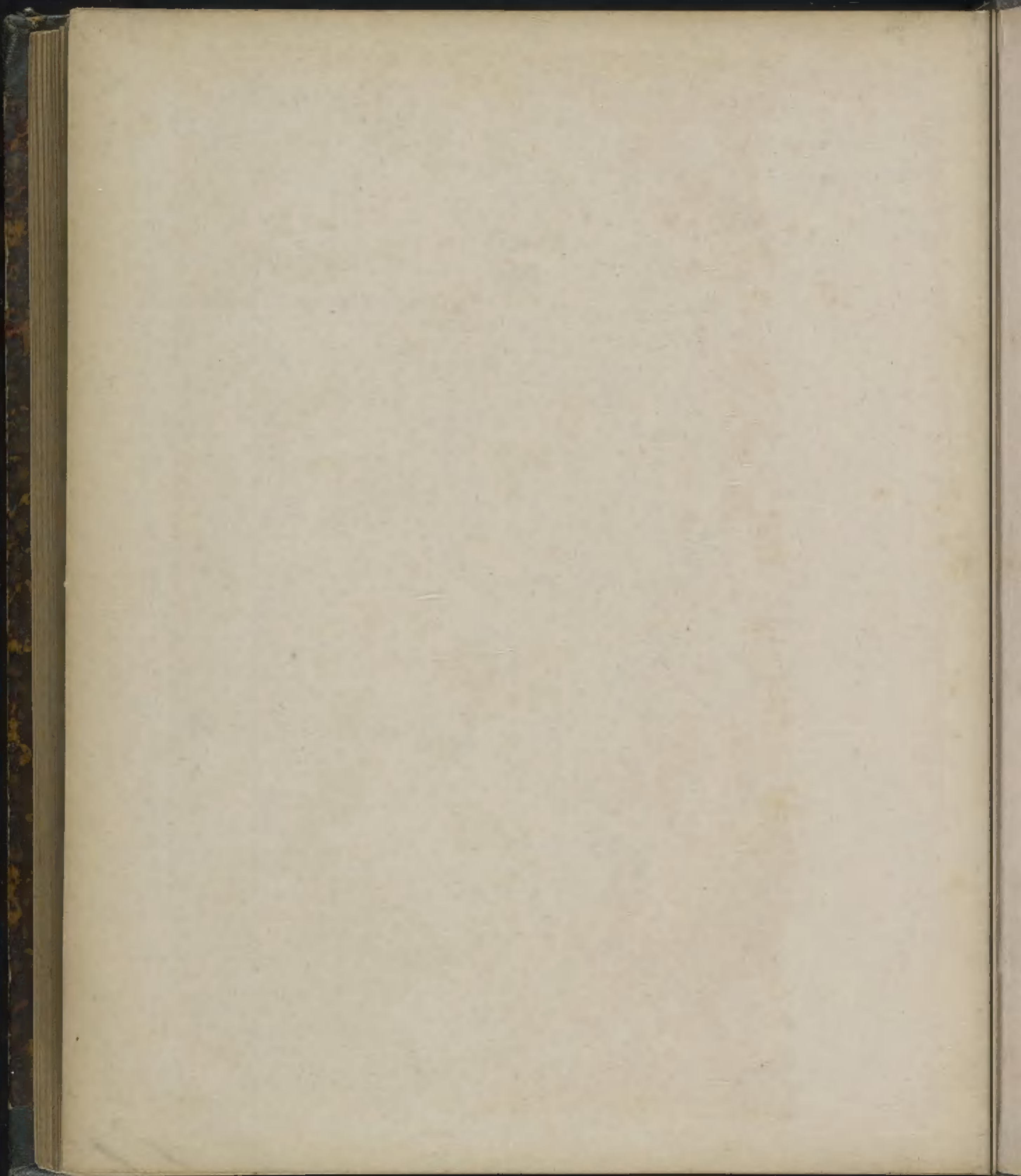


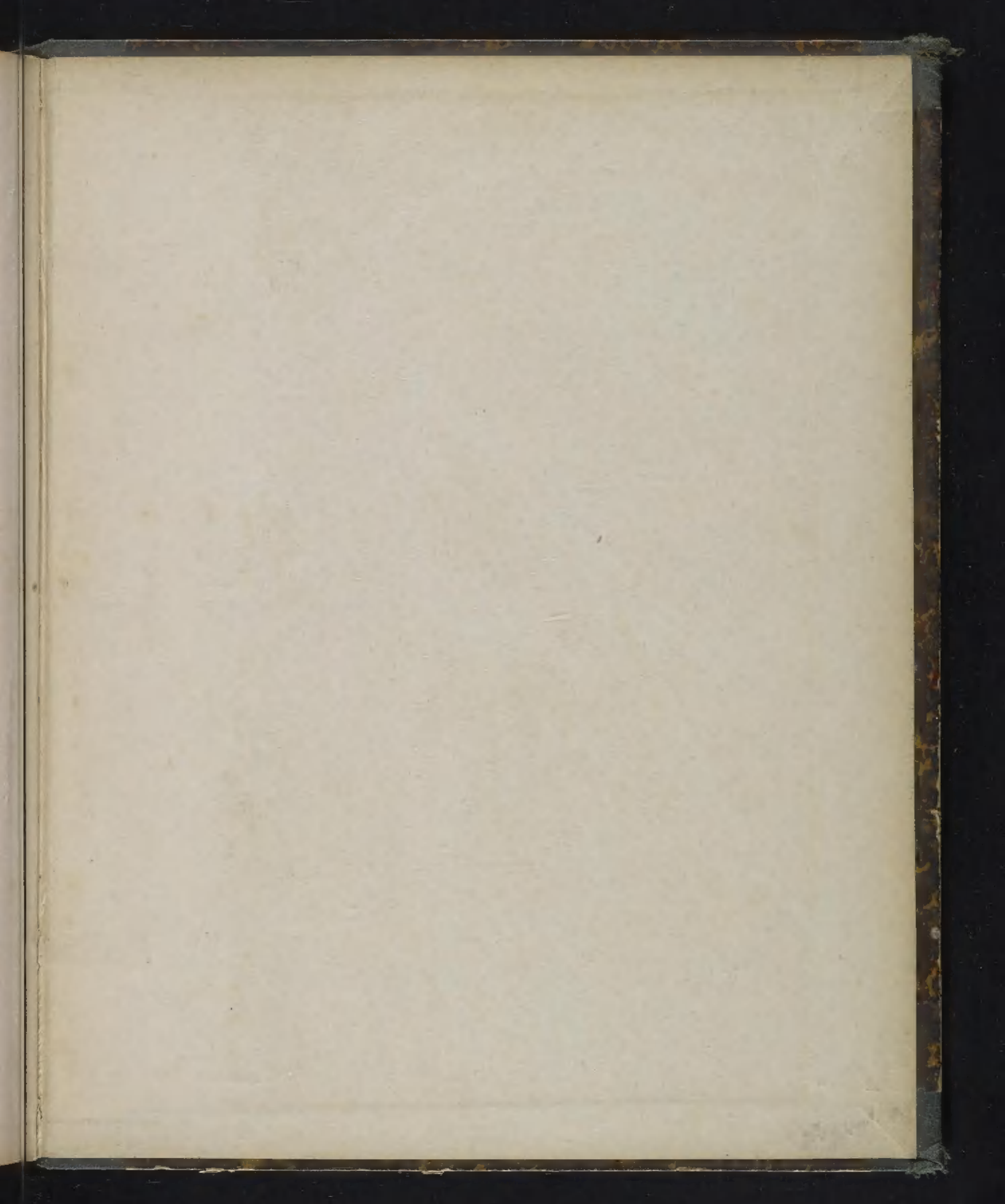


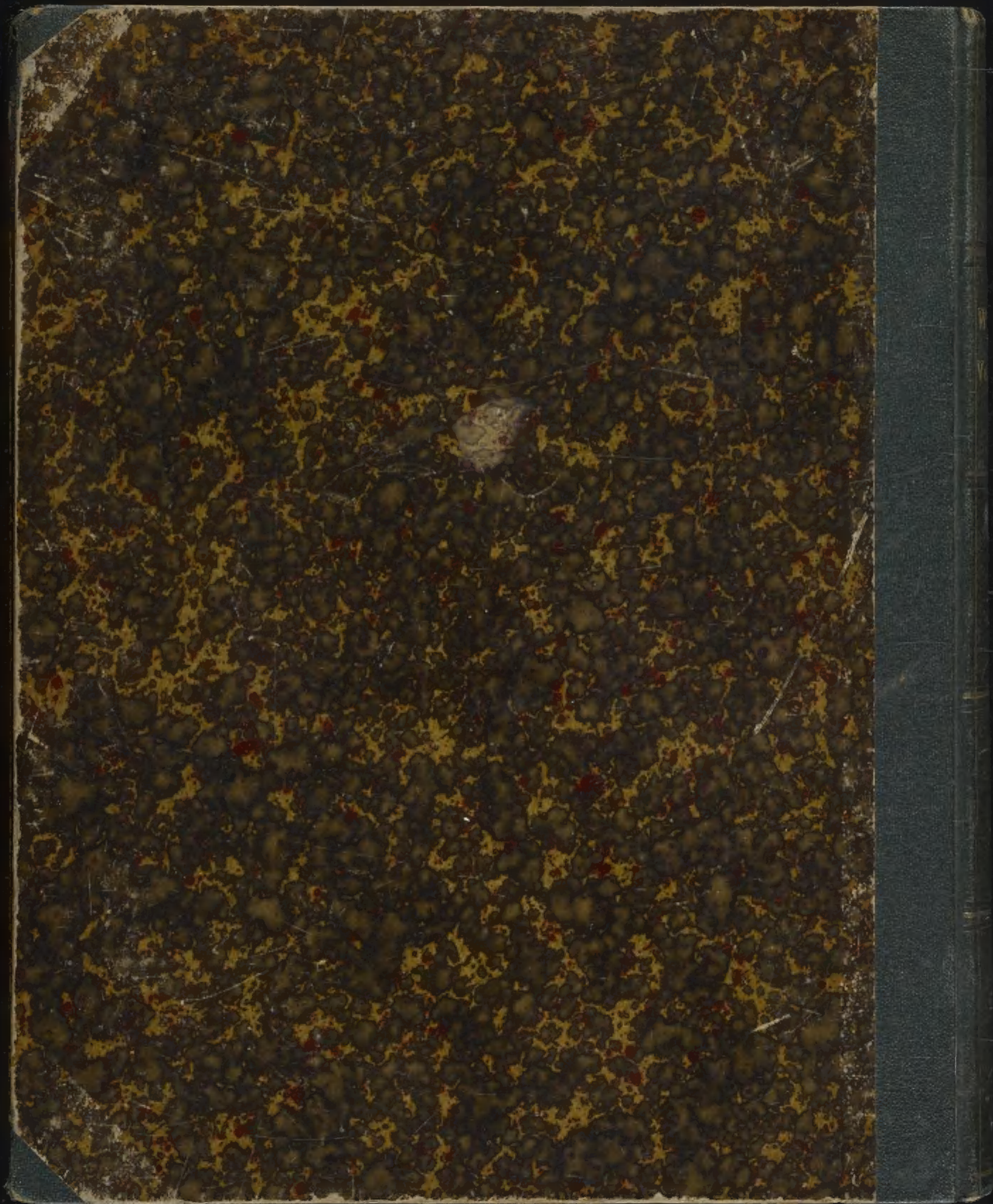












Weierstrass.

Vermischtes.